

Notizen VL 8

Betrachte folgende Knapsack-Instanz: (bzw. einfach Subset Sum)

$n=12$, $z_i = p_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, ~~$z = 111111$~~ , sowie

$$P = Z = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

$$z_1 = p_1 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$z_2 = p_2 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$z_3 = p_3 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$z_4 = p_4 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$z_5 = p_5 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}$$

$$z_6 = p_6 = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$z_7 = p_7 = \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

$$z_8 = p_8 = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

$$z_9 = p_9 = \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & & & & \end{array}$$

$$z_{10} = p_{10} = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & & & & \end{array}$$

$$z_{11} = p_{11} = \begin{array}{cccccc} 2 & & & & & \end{array}$$

$$z_{12} = p_{12} = \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \end{array}$$

Was fällt bei dieser Instanz auf?

Können wir Bedingungen ableiten, wann wir ein Objekt (nicht) aufnehmen dürfen?

Wir können die Objekte in Paare $(2i, 2i+1)$ aufteilen
 $i=1, \dots, 6$

und die Ziffern einzeln betrachten, da sich die einzelnen Ziffern nicht auf ≥ 10 addieren.

Ziffer 1 ~~sagt~~ von 2 sagt uns:

Nimm Objekt 1 oder 2, aber nicht beide!

Ziffer 2:

Gleiches mit Objekt 3, 4

Ziffer 3:

Gleiches mit Objekt 5, 6.

Ziffer 4:

Objekte 7 und 8 können die Ziffer 4 nicht erzeugen.

Wir benötigen zusätzlich Objekte 1, 3, oder 6.

Ziffer 5:

Objekte 9 und 10 können die Ziffer 4 nicht erzeugen.

Wir benötigen zusätzlich Objekte 1, 4, oder 6.

Ziffer 6:

Objekte 11 und 12 können die Ziffer 4 nicht erzeugen.

Wir benötigen zusätzlich Objekte 2, 3, oder 5.

Die ersten drei Paare schließen sich innerhalb gegenseitig aus! Aber einer muss jeweils...

Betrachte also ~~eine~~ ^{die} Entscheidungsvariablen

$$x_1 = \begin{cases} 0, & \text{falls Objekt 2 gewählt wird} \\ 1, & \text{falls Objekt 1 gewählt wird} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 0, & \text{falls Objekt 4 gewählt wird} \\ 1, & \text{falls Objekt 3} \quad \text{--- " ---} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 0, & \text{falls Obj. 6} \quad \text{--- " ---} \\ 1, & \text{falls Obj. 5} \quad \text{--- " ---} \end{cases}$$

Damit ergibt sich bzgl. Ziffern 4, 5, 6:

$(x_1 \text{ oder } x_2 \text{ oder } (1-x_3))$ und $(x_1 \text{ oder } (1-x_2) \text{ oder } (1-x_3))$ und $((1-x_1) \text{ oder } x_2 \text{ oder } x_3)$ jeweils mind. 1

Als boolescher Ausdruck:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Finden wir eine Belegung der Variablen, sodass der Ausdruck wahr wird, ist die Knapsack-Iustanz lösbar!

Es gibt also ein $S \subseteq \{1, \dots, 12\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = 2$

gdw. $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$ eine erfüllende Belegung besitzt.

Also: Haben wir einen Algorithmus um S zu finden, lösen wir die logische Formel.

Wir werden sehen:

Jede logische Formel ^(mit $\vee, \wedge$) lässt sich in eine solche Knapack-Instanz umwandeln!