Notizen VL 7

Beweis Satz 4.7

a) zunächst gibt es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ viele Teilmengen der Größe k. Asymptotisch wächst das wie $O(n^k)$. Kleinere Teilmengen verschwinden in der ~~O~~ O-Notation.

Greedy$_0$ auf dem Rest (Instanz generieren + ausführen) schafft man definitiv in $O(n^2)$ Zeit.

Damit ist die Gesamtlaufzeit $O(\cancel{k}\, n^{k+2})$, also polynomiell für fixes k.

b) Sei OPT ein optimaler Lösungswert, erzielt mit einer Teilmenge $S^* \subseteq \{1, \dots, n\}$. Wir unterscheiden:

1. $|S^*| \leq k$. Dann testet Greedy$_k$ S^* als ein $\bar{S}$ und findet das Optimum.

2. $|S^*| > k$.

   Seien $i_1, \dots, i_k$ die ersten k Objekte in S^* mit größtem Nutzen. Diese Teilmenge wird von Greedy$_k$ als $\bar{S}$ getestet und erweitert.

   Seien $i_{k+1}, \dots, i_{k+\ell}$ die hinzugenommenen Objekte und $i_{k+\ell+1}$ das erste Objekt, das nicht mehr passt.

Dann wissen wir:

a) $\sum_{j=1}^{k} p_{i_j} + \sum_{j=1}^{\ell} p_{i_{k+j}} + p_{i_{k+\ell+1}} \geq OPT$

b) $\sum_{j=1}^{k} p_{i_j} + \sum_{j=1}^{\ell} p_{i_{k+j}} \leq G_k$

Mit $p_{i_{k+\ell+1}} \leq p_{i_j}$ für alle $j \in \{1, \dots, k+\ell\}$ ~~ist~~ folgt

c) $p_{i_{k+\ell+1}} \leq \frac{1}{k} G_k$

Damit ist

$$OPT \underset{a)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} p_{i_j} + \sum_{j=1}^{\ell} p_{i_{k+j}} + p_{i_{k+\ell+1}} \underset{b),c)}{\leq} G_k + \frac{1}{k} G_k = \frac{k+1}{k} G_k$$

Also:

$$G_k \geq \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) OPT \qquad \square$$