



Technische
Universität
Braunschweig



Algorithmen und Datenstrukturen 2

Arne Schmidt

Exkurs – Traveling Salesman Problem

Ein Reisender

Ein Reisender möchte alle großen Städte eines Landes besuchen, dabei aber so wenig wie möglich Zeit mit dem tatsächlichen Reisen verbringen.

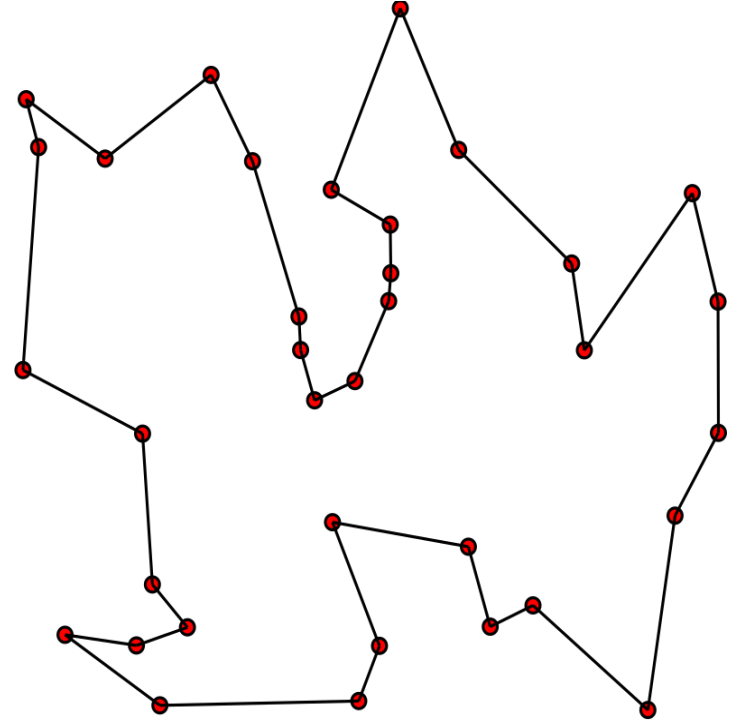
Klar ist:

Der Reisende kann sich nicht aufteilen.

Also:

Entweder gehen wir von Stadt x zu Stadt y, oder wir lassen es sein.

Wie kann der Reisende nun eine kürzeste Tour bestimmen?



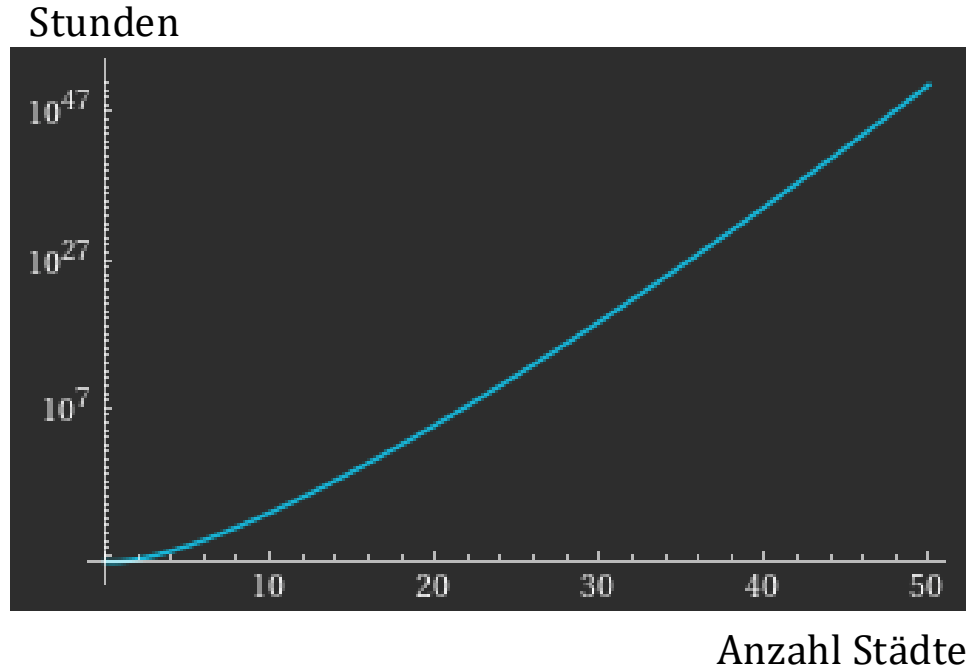
Brute Force

Es gibt $(n - 1)!$ viele Touren durch n Städte.

Angenommen, wir können 18 Milliarden Touren in der Sekunde durchprüfen.

Der log-Plot zeigt dann die benötigte Zeit in Stunden an, um die beste Lösung zu finden.

Brute Force scheidet definitiv aus!



Graphen vs. Punkte



Auf einem gegebenen Graph mit beliebigen Kosten ist es schwer gute Lösungen zu finden.

Wie sieht das auf „realistischen“ Instanzen aus?

Es ist NP-schwer, TSP mit Faktor k zu approximieren.

Euklidisches TSP - Definition

Gegeben: Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Eine Permutation π , sodass

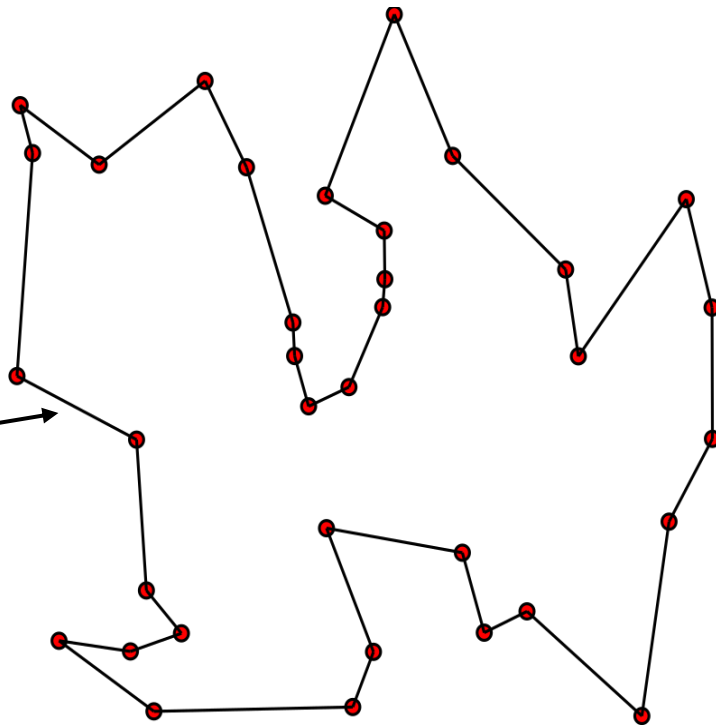
$$\sum_{i=1}^n \|p_{\pi(i)} p_{\pi(i+1)}\|$$

mit $\pi(n+1) = \pi(1)$ minimal ist.

Länge der Kante ist die
euklidische Distanz

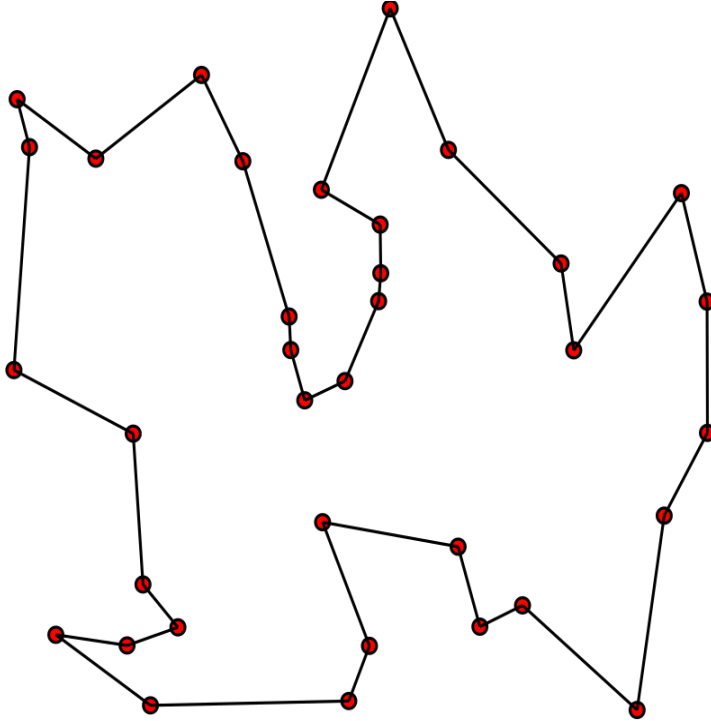
Es existiert eine 2-Approximation für ETSP.

Beweis: Tafel



Lösungsansätze in der Praxis

TSP-Formulierung



Betrachte Verbindungen (Kanten) ungerichtet.

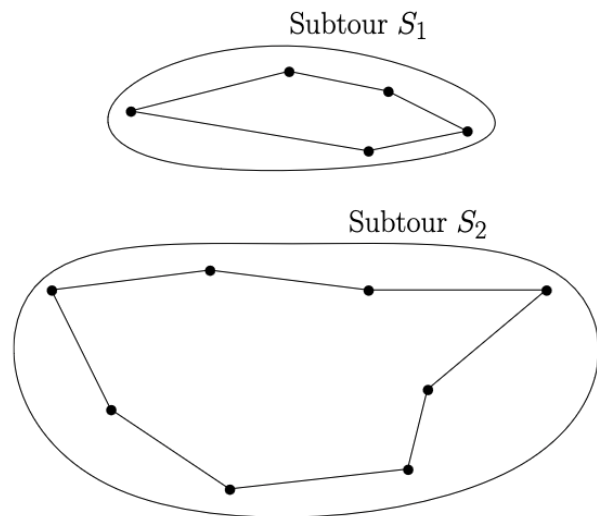
1. An jedem Knoten liegen exakt zwei Kanten.
2. Die Tour ist zusammenhängend.

Bedingung zu 1. ist einfach:

- Jede Kante ist eine 0-1-Variable
- Die Summe der Variablen an jedem Knoten muss 2 ergeben.

Wie sieht der Constraint zu 2. aus?

TSP-Formulierung



Betrachte Kanten ungerichtet.

1. An jedem Knoten liegen exakt zwei Kanten.
2. Die Tour ist zusammenhängend.

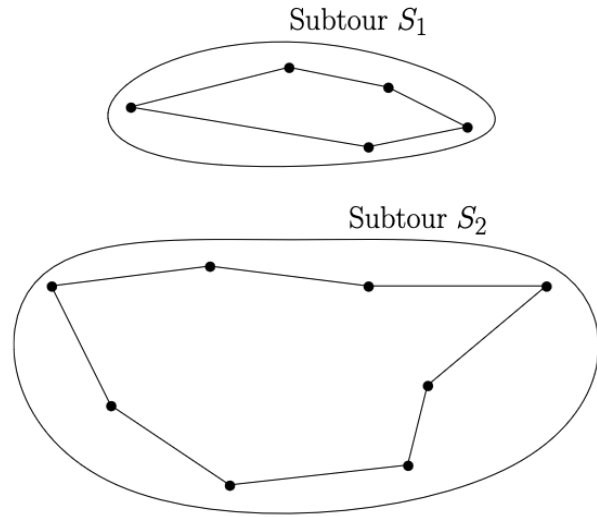
Bedingung zu 1. ist einfach. Aber zu 2.?

Betrachte Menge S_1

Wie viele Kanten müssen herausführen?

→ Mindestens zwei!

TSP-Formulierung – Danzig, Fulkerson, Johnson



Degree-Constraint

Subtour-Constraint

$$\min \sum_{e \in P \times P} c_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta(p)} x_e = 2, \quad \forall p \in P$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2, \quad \forall \emptyset \neq S \subsetneq P$$

$$x_e \in \{0,1\}$$

Lazy Constraints

Problem:

Das IP hat exponentiell viele Constraints!

Wir brauchen aber u.U. nicht alle.

- Löse zunächst das IP ohne die Subtour-Constraints.
- Nach Erhalt der Lösung, prüfe, ob Constraints verletzt sind. Füge verletzte Subtour-Constraints hinzu!

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{e \in P \times P} c_e x_e \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{e \in \delta(p)} x_e = 2, \quad \forall p \in P \\ & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2, \quad \forall \emptyset \neq S \subsetneq P \\ & x_e \in \{0,1\}\end{array}$$

Wir fügen Constraints also nur hinzu, wenn es unbedingt sein muss. Die Constraints werden auch „lazy constraints“ genannt.

Finden von verletzten Subtour-Constraints

Integral:

Nutze einen Graphscan-Algorithmus (DFS/BFS), um eine Komponente zu finden.

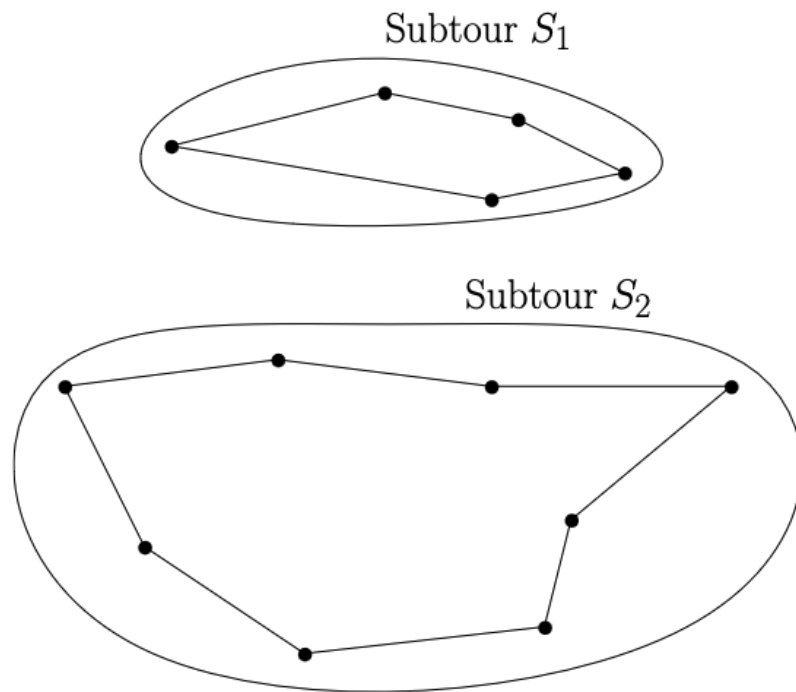
Enthält die Komponente nicht alle Knoten, dann wurde eine Subtour gefunden!

In diesem Fall:

$$\sum_{e \in \delta(S_1)} x_e = 0 < 2$$

⇒ Füge folgenden Constraint hinzu:

$$\sum_{e \in \delta(S_1)} x_e \geq 2$$



Finden von verletzten Subtour-Constraints

Fractional:

Wieder BFS/DFS für einzelne Komponenten.

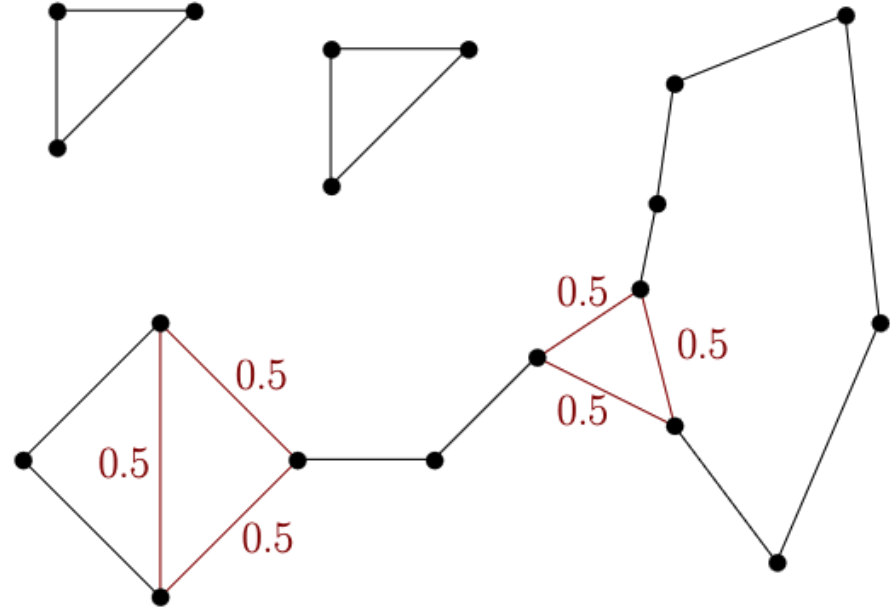
Ansonsten:

Für gültige Lösungen muss jeder *Cut* mindestens den Wert 2 besitzen.

Frage: Gibt es einen Cut, der kleiner als zwei ist?

Algorithmus:

Stoer-Wagner zum Finden eines globalen Minimum Cuts („minimum graph cut“).



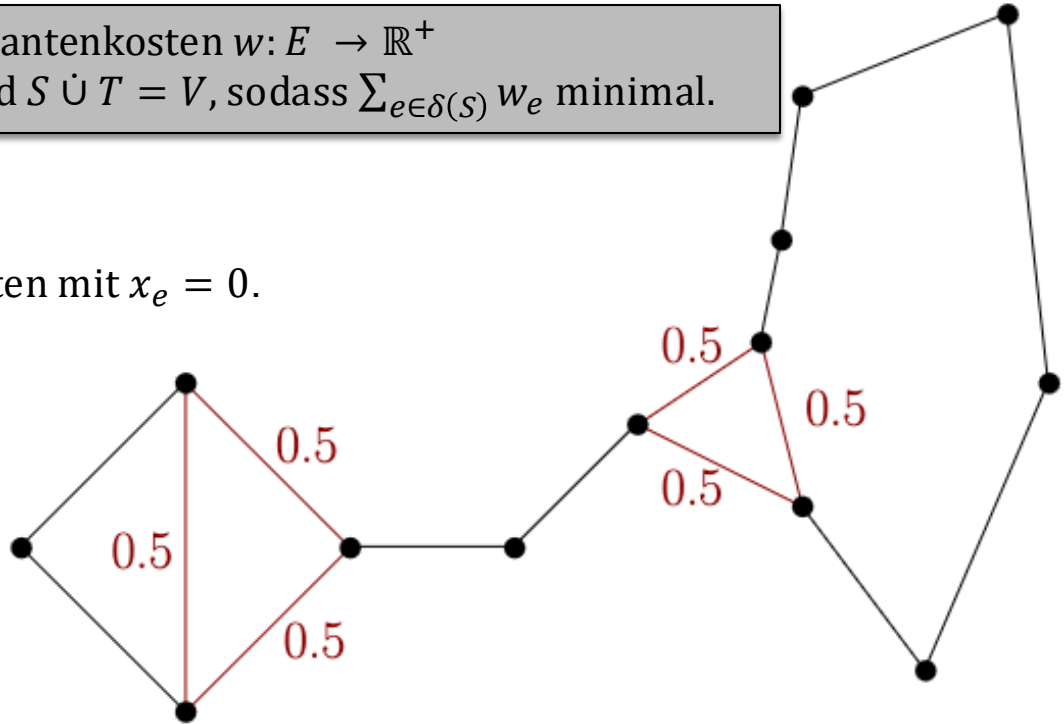
Minimum Graph Cut

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und Kantenkosten $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$
Gesucht: $S, T \subset V$ mit $S, T \neq \emptyset$ und $S \dot{\cup} T = V$, sodass $\sum_{e \in \delta(S)} w_e$ minimal.

In unserem Fall:

Setze $w_e := x_e$ und ignoriere Kanten mit $x_e = 0$.

Stoer-Wagner löst das Problem
in Zeit $O(|V||E| + |V|^2 \log|V|)$.

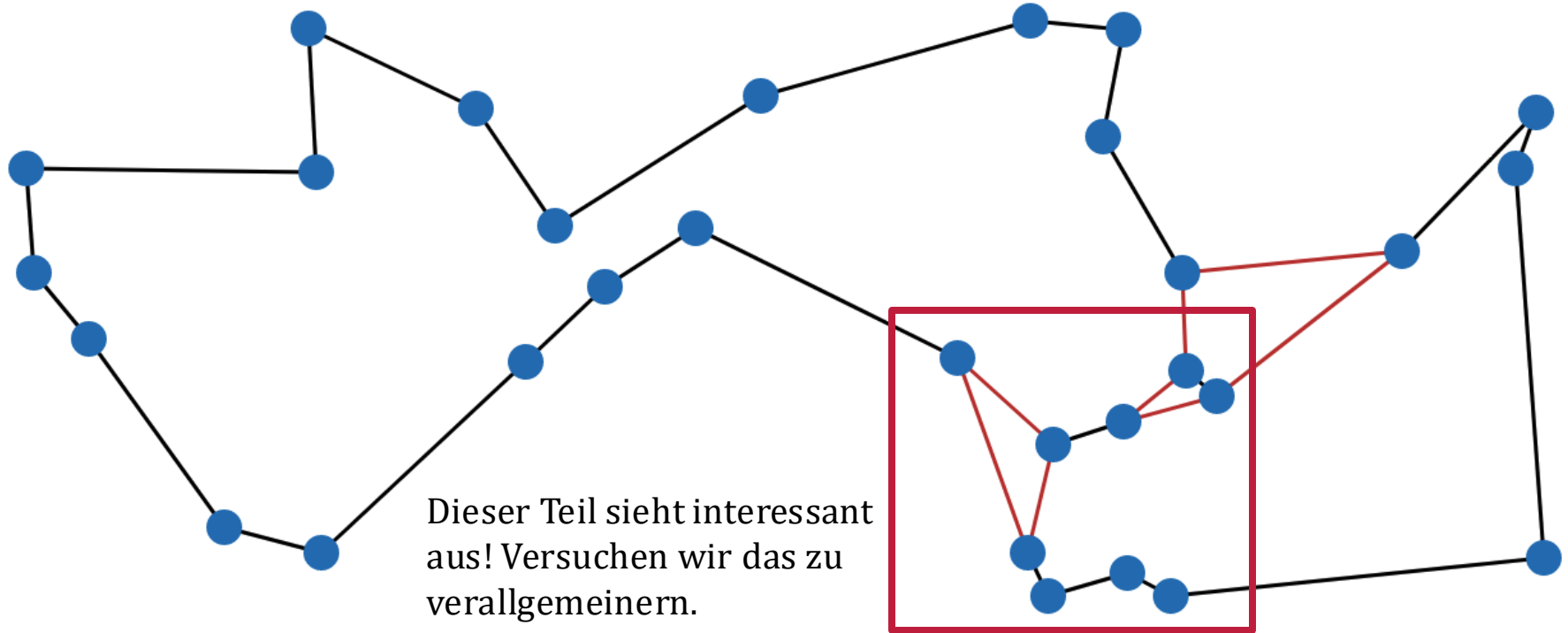


Live Demo

<https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/app/diy.html#>

TSP – Optionale Constraints

Cutting Planes



Eine spezielle Situation

Alle Subtour-Constraints sind erfüllt.

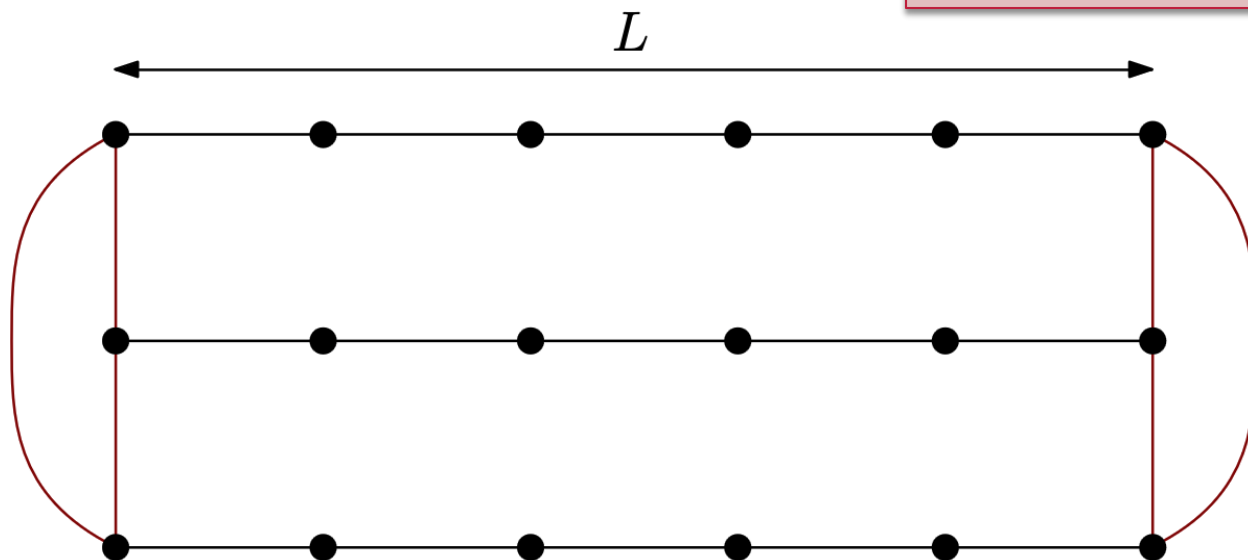
Fraktionale Lösung geht für $L \rightarrow \infty$ gegen $3L + 4$.

Eine optimale, integrale Lösung hat Wert mindestens $4L$.

→ (Asymptotischer) Integrality Gap ist mindestens $4/3$.

Vermutung:

Der Integrality Gap der Danzig-Formulierung ist $4/3$.

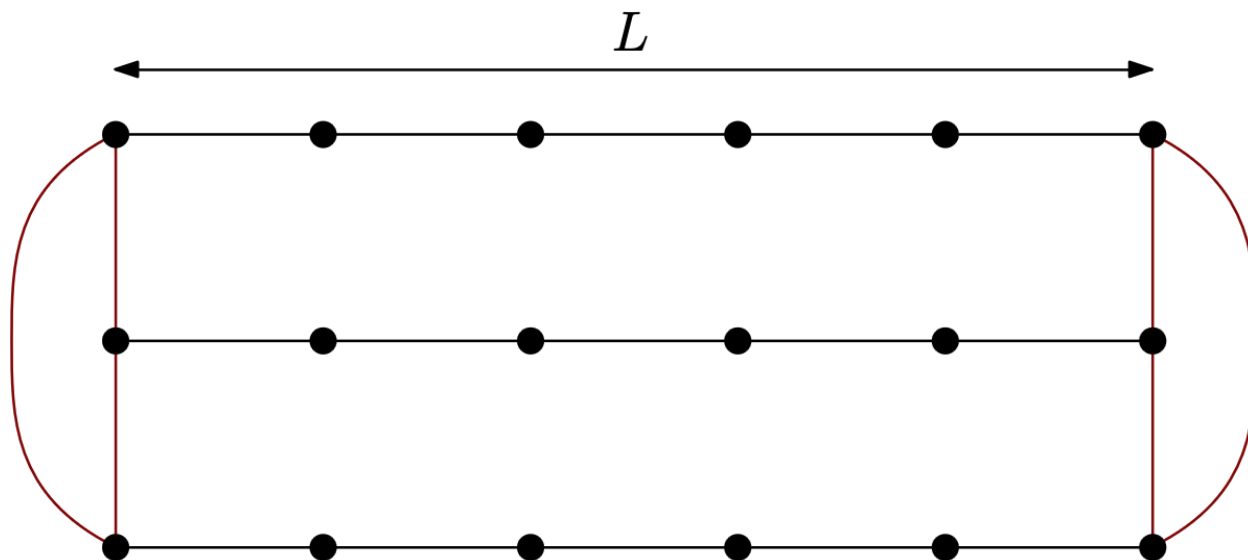


Eine spezielle Situation

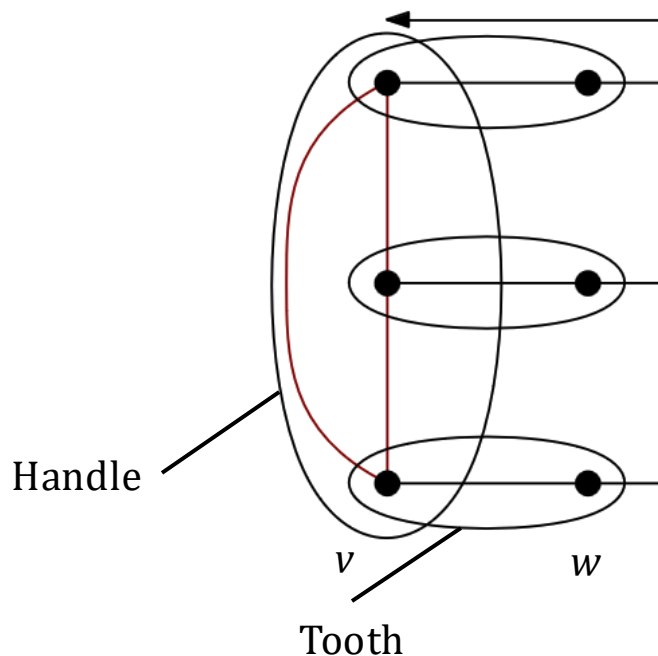
Können wir hier noch etwas tun?

In diesem Beispiel: Für müssen die linke / rechte Seite entweder 2-mal oder 4-mal verlassen.

Hier passiert es aber an drei Stellen!



Comb-Ungleichungen



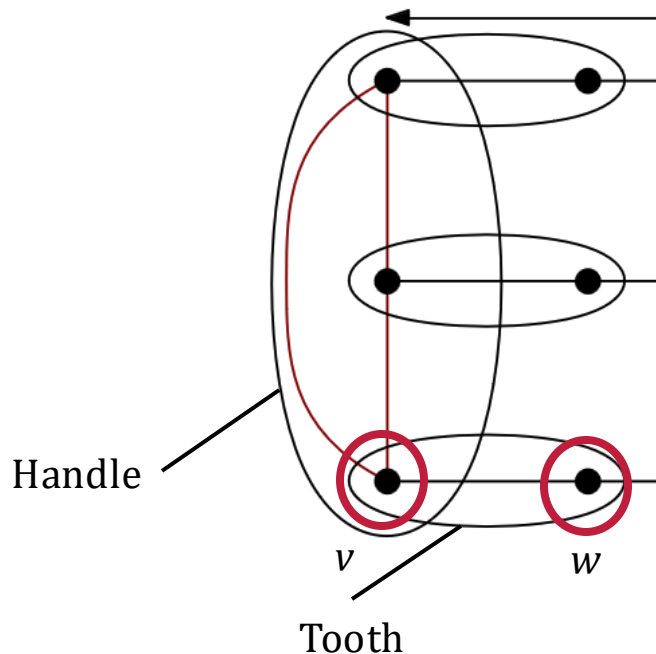
Eine Aufteilung von V in Knotenmengen $H, T_1, T_2, \dots, T_k$ mit

- $H \cap T_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, k$
- $T_i \setminus H \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, k$
- $T_i \cap T_j = \emptyset$ für alle $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$
- k ungerade

wird **Comb** genannt. Dabei werden H der **Handle** und die T_i die **Teeth** des Combs genannt.

Betrachte was bei dem Handle bzgl. eines Tooth passiert!

Comb-Ungleichungen



Beide Knoten haben Grad 2. Fallunterscheidung für Handle H am Knoten v und Tooth T_i !

Sei dazu d_S die Anzahl an Kanten, die aus der Menge S herausführt und $d(v)$ der Grad eines Knoten.

1. Beide Kanten von v laufen innerhalb von H .
Dann muss $d_{T_i}(v) + d_{T_i}(w) = d_{T_i} \geq 3$ sein.
2. Eine Kante von v läuft innerhalb von H .
Dann muss $d_H(v) = 1$ und $d_{T_i} \geq 2$ sein.
3. Keine Kante von v läuft innerhalb von H .
Dann ist $d_H(v) = 2$ und $d_{T_i}(w) \geq 1$.

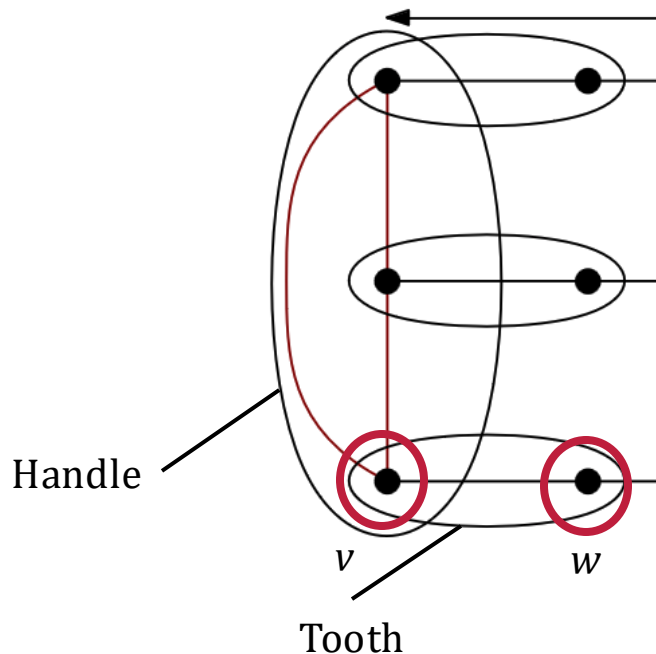
Damit ist also

$$d_H(v) + d_{T_i} \geq 3$$

Aufsummiert für alle Teeth:

$$d_H + \sum_{i=1}^k d_{T_i} \geq 3k$$

Comb-Ungleichungen



Aufsummiert für alle Teeth:

$$d_H + \sum_{i=1}^k d_{T_i} \geq 3k$$

Nun müssen d_H und d_{T_i} gerade sein!

Da k ungerade, ist also die linke Seite gerade und die rechte Seite der Ungleichung ungerade.

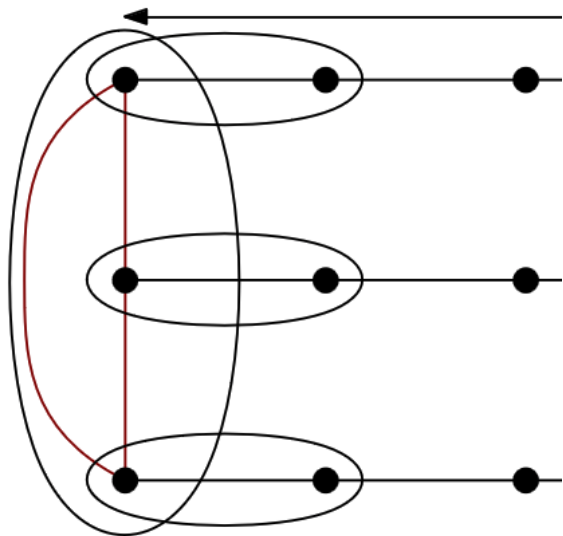
Also muss auch gelten:

$$d_H + \sum_{i=1}^k d_{T_i} \geq 3k + 1$$

Damit erhalten wir als Constraint:

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^k \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3k + 1$$

Comb-Ungleichungen



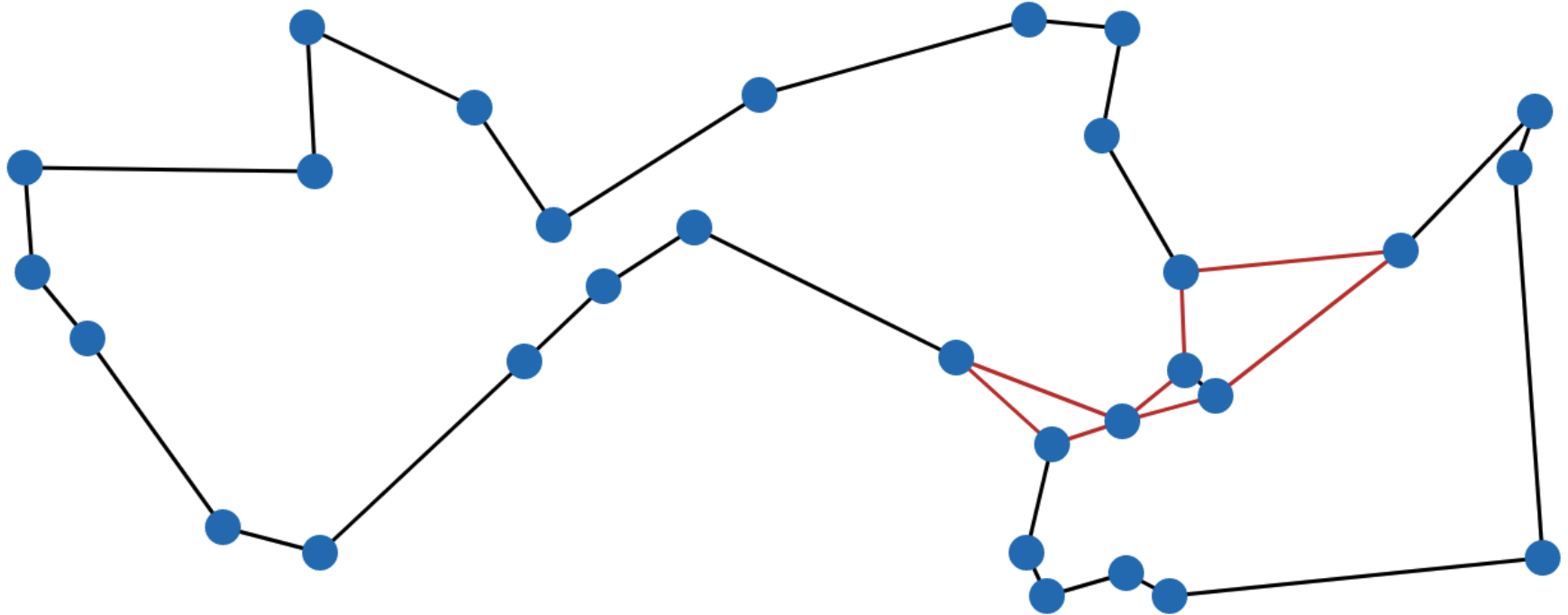
In dieser fraktionalen Lösung:

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^k \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e = 9$$

Gefordert sind aber $3k + 1 = 10$.

Wir können also einen neuen Constraint hinzufügen!

Lösung mit Comb-Ungleichungen



Comb-Ungleichungen



Es ist nicht bekannt, ob das Finden von Combs NP-schwer ist oder ob diese effizient gefunden werden können.

Es existieren aber gute Heuristiken, z.B.:
Suche den Handle über Komponenten, die durch fraktionale Kanten aufgespannt werden und Kanten als Teeth, die diese Komponente verlassen.