

Präsenzblatt 5

Dieses Blatt dient lediglich der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben und ihrer Lösungen erfolgt in den kleinen Übungen in der Woche vom 30.06.2025.

Präsenzaufgabe:

Wir betrachten das folgende Problem.

Gegeben: Eine endliche Menge U , eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von U und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Ein *Set Cover* von $(U, \mathcal{F})$ der Größe höchstens k . Ein Set Cover ist eine Teilfamilie $F \subseteq \mathcal{F}$, die U überdeckt, d.h. für jedes Element $u \in U$ gibt es eine Menge $M \in F$ mit $u \in M$. Die Größe eines Set Covers ist $|F|$; die Anzahl an Mengen in F .

Wir nehmen an, dass jedes Element aus U in einer Menge aus $\mathcal{F}$ vorkommt.

Als Beispiel betrachte $U := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{F} := \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 5\}\}$, sowie $k = 3$. $F := \{\{1, 4\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 5\}\}$ ist ein Set Cover von $(U, \mathcal{F})$. Es kann schnell überprüft werden, dass es für $k = 2$ kein Set Cover gibt. Eine graphische Darstellung dieser Instanz ist in Abbildung 1 abgebildet.

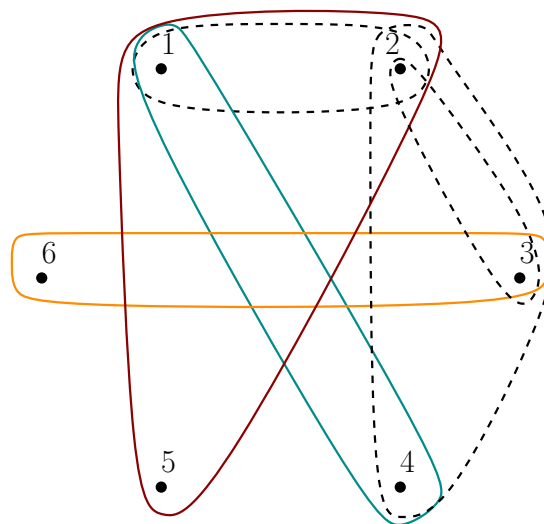


Abbildung 1: Beispiel einer Instanz von SET COVER. Punkte entsprechen den Elementen in U , Kreise entsprechen den Mengen in $\mathcal{F}$. Die farbige Auswahl entspricht einem Set Cover.

a) Zeige, dass Set Cover NP-schwer ist. (Hinweis: Nutze VERTEX COVER.)

Da SET COVER also NP-schwer ist, bietet es sich an, Approximationsalgorithmen zu betrachten, um das kleinste k zu finden. Der folgende Algorithmus (GREEDYSC) versucht ein möglichst kleines Set Cover zu bestimmen.

Algorithmus 1 Algorithmus GREEDYSC zum Finden eines Set Covers. In jeder Iteration wird diejenige Menge aufgenommen, die die meisten noch nicht überdeckten Elemente besitzt.

```

1: function GREEDYSC( $U, \mathcal{F}$ )
2:    $C := \emptyset$  ▷ Menge der bereits überdeckten Elemente
3:    $\bar{C} := U$  ▷ Menge der noch zu überdeckenden Elemente
4:    $SC := \emptyset$  ▷ Set Cover

5:   while  $C \neq U$  do
6:      $S := \operatorname{argmax}_{M \in \mathcal{F}} |M \cap \bar{C}|$  ▷ Menge mit den meisten nicht überdeckten Elementen
7:      $C := C \cup S$ 
8:      $\bar{C} := \bar{C} \setminus S$ 
9:      $SC := SC \cup \{S\}$ 

10:  return  $SC$ 

```

- b) Wende GREEDYSC auf folgende Instanz an: $U := \{1, \dots, 10\}$, $\mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_5\}$ mit $F_1 = \{1, 2, 3, 7, 9\}$, $F_2 = \{4, 5, 6, 8, 10\}$, $F_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F_4 = \{7, 8\}$ und $F_5 = \{9, 10\}$.
Gib dabei nach jeder Iteration der while-Schleife S , C sowie $\bar{C}$ an.

- c) Betrachte Instanzen der folgenden Form. Sei $3 \leq \ell \in \mathbb{N}$ und $q = 2^\ell - 1$. Das Universum besteht aus zwei Teilmengen mit je q Elementen, also $U = \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{y_1, \dots, y_q\}$. Die Menge der möglichen Mengen $\mathcal{F}$ enthält die zwei Mengen $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ sowie zusätzlich die Mengen

$$M_i = \{x_{2^{i-1}}, \dots, x_{2^i-1}\} \cup \{y_{2^{i-1}}, \dots, y_{2^i-1}\}$$

für $1 \leq i \leq \ell$. Abbildung 2 zeigt als Beispiel die Instanz für den Fall $\ell = 3$.

Was ist die Größe eines optimalen Set Covers auf dieser Art von Instanz? Welche Größe hat das Set Cover, das GREEDYSC berechnet, in Abhängigkeit von ℓ ? Wie wächst der asymptotische Faktor zwischen OPT und GREEDYSC in Abhängigkeit der Größe des Universums $n = 2q$ (in O -Notation)? Ist GREEDYSC ein Approximationsalgorithmus im Sinne der Vorlesung?

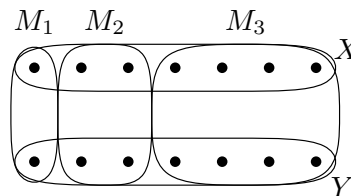


Abbildung 2: Instanz aus Aufgabenteil c) für $\ell = 3$.