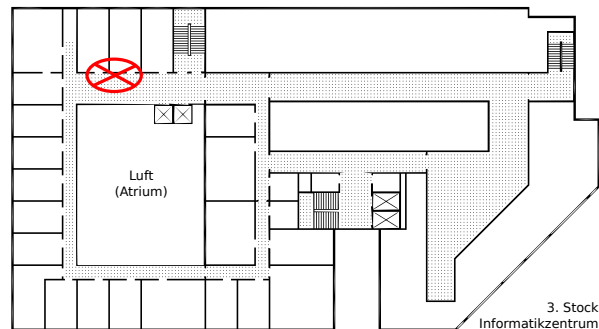


Hausaufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 27.06.2025 um 13:30 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Auf deine Abgabe unbedingt Namen, Matrikelnummer und deine Gruppennummer schreiben! Die Blätter bitte zusammenheften!**



Hausaufgabe 1 (Greedy_k):

(7 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus GREEDY_k aus der Vorlesung. Wende GREEDY_k auf die folgende Instanz an und gib die beste gefundene Lösung an.

i	1	2	3	4	
z_i	7	14	14	13	mit $Z = 27$ und $k = 2$
p_i	7	12	13	14	

Gib dazu für jede betrachtete fixierte Teilmenge $\bar{S}$ der Objekte die folgenden Mengen bzw. Werte in einer Tabelle an.

- $\bar{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.

Falls die in $\bar{S}$ ausgewählten Elemente die Restkapazität überschreiten, trage hier jeweils anstelle des Wertes ein $\times$ ein.

- G_k : Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S : Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Betrachte (analog zum Beispiel aus der großen Übung) fixierte Mengen $\bar{S}$ mit weniger Elementen *vor* Mengen mit mehr Elementen. Für zwei fixierte Mengen der gleichen Größe M_1, M_2 betrachte M_1 vor M_2 , falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$ (lexikografische Sortierung).

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X , die nicht in Y vorkommen. Wir betrachten also $M_1 = \{1, 2\}$ vor $M_2 = \{1, 3\}$, weil das kleinste Element von $M_1 \setminus M_2 = \{2\}$ kleiner ist als das kleinste Element von $M_2 \setminus M_1 = \{3\}$.)

Hausaufgabe 2 (3-Satisfiability):**(4+1 Punkte)**

Betrachte das Problem 3-SAT aus der Vorlesung und die folgende Instanz.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

- a) Transformiere die 3-SAT-Instanz in eine Instanz von 0-1-KNAPSACK, indem du die Reduktion aus der Vorlesung nutzt. (Hinweis: Einen Pseudocode für diese Reduktion gibt es im Skript.)
- b) Gib eine Belegung für die Variablen $x_1, \dots, x_4$ an, die die gegebene Instanz erfüllt.

Hausaufgabe 3 (Approximation mit GREEDY₀):**(1+2+1+1+3 Punkte)**

Wir betrachten den Algorithmus GREEDY₀ für Instanzen mit folgenden Eigenschaften:

- (A) jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- (B) die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

Sei das $(k+1)$ -ste Objekt das erste Objekt, welches GREEDY₀ nicht aufnimmt und sei OPT der optimale Lösungswert.

- a) Zeige: $\sum_{i=1}^k z_i > \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot Z$
- b) Zeige: $(\alpha-1)p_{k+1} \leq \sum_{i=1}^k p_i$
(Hinweis: Nutze a))
- c) Zeige: $\sum_{i=1}^k p_i \leq \text{OPT}$
- d) Zeige: $\text{OPT} \leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i$
- e) Zeige: GREEDY₀ liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (A) und (B) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$ -Approximation. (Hinweis: Nutze b), c) und d).)