Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #6

Wiederholung

Ramin Kosfeld & Chek-Manh Loi

10.07.2024

Inhalt

Wiederholung AuD2 Inhalte

Klausurinfos

Übung Reduktionen

Übung / Ausblick Branch & Bound

Zusammenfassung

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Zusammenfassung
Algorithmen und Datenstrukturen 2

Knapsackvarianten

Problem	
Typ	
Komplexität	
Algorithmen	
Bemerkung	
Laufzeit	

Knapsackvarianten

Problem	0-1-Knapsack		Maximum Knapsack				Fractional Knapsack
Typ	Entscheidungsproblem		Optimierungsproblem				Optimierungsproblem
Komplexität	NP-vollständig		← Zugehöriges Entscheidungsproblem ist NP-vollständig				P
Algorithmen	DP	B&B	Greedy_0	Greedy_k $(k > 0)$	DP	B&B	Greedy
Bemerkung	-	-	Wert ist bel. schlecht	$1 - \frac{1}{k+1}$-Approximation	Optimal	Optimal	Optimal
Laufzeit	$O(nZ)$	$O(n2^n)$	$O(n \log n)$	$O(n^{k+1})$	$O(nZ)$	$O(n2^n)$	$O(n \log n)$

Weitere Probleme:

- Subset Sum: NP-vollständig, Dynamisches Programm
- Partition: NP-vollständig, Dynamisches Programm

Techniken

Nicht nur für Knapsack etc. relevant:

- Greedy-Algorithmen, Heuristiken
- Dynamic Programming
- Branch & Bound
- Approximationsalgorithmen

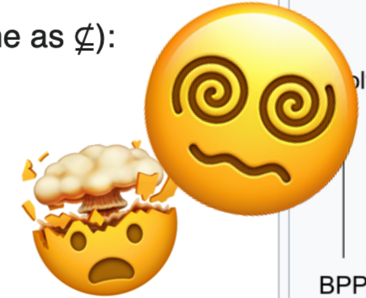
Hierzu sollte man nicht nur die spezifischen Algorithmen der Vorlesung gut kennen!
Auch ein gutes Verständnis der grundsätzlichen Ideen ist wichtig!
Algorithmenentwurfaufgabe (i.d.R. zu Branch & Bound oder Dynamic Programming)!

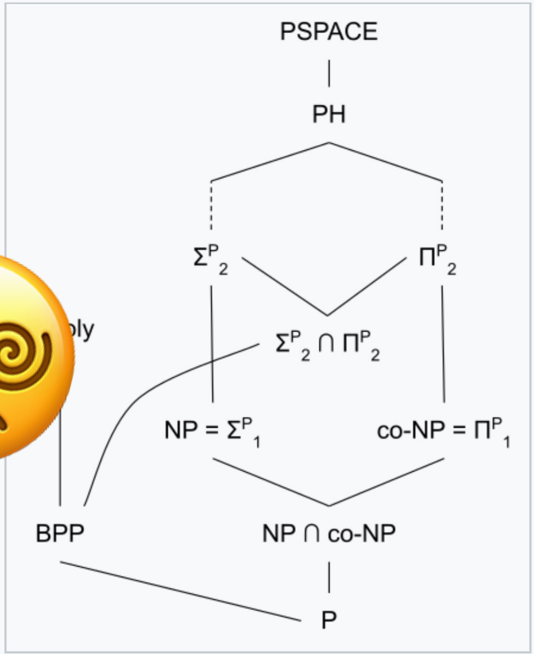
Komplexität

The following relations are known between PSPACE and the complexity classes NL, P, NP, PH, EXPTIME and EXPSPACE (note that $\subsetneq$, meaning strict containment, is not the same as $\not\subseteq$):

$$\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$$
$$\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME} \subseteq \mathsf{EXPSPACE}$$
$$\mathsf{NL} \subsetneq \mathsf{PSPACE} \subsetneq \mathsf{EXPSPACE}$$
$$\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{EXPTIME}$$

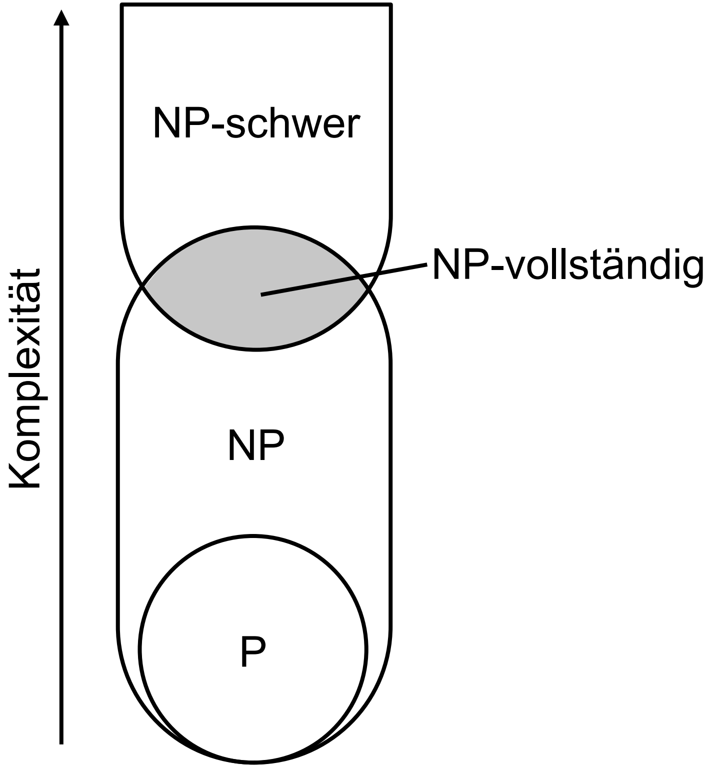
From the third line, it follows that both in the first and in the second line, at least one of the set containments must be strict, but it is not known which. It is widely suspected that all are strict.





Inclusions of complexity classes including P, **NP**, co-NP, BPP, P/poly, PH, and PSPACE

Komplexitätsklassen



Ein Problem Π liegt in

- **P**, falls es einen Polynomialzeitalgorithmus gibt, der Π korrekt löst.
- **NP**, falls jede Lösung in polynomieller Zeit verifiziert werden kann.

Mindestens so schwer wie NP, denn man kann alle Probleme aus NP (per Reduktion) damit lösen

Ein Problem Π heißt

- **NP-schwer**, falls jedes Problem aus NP auf Π *reduziert* werden kann.
- **NP-vollständig**, falls Π NP-schwer ist und in NP liegt.

Quasi die komplexesten Probleme in NP – denn mit ihnen kann man *auch alle anderen Probleme in NP* lösen!

Probleme & Komplexitäten

Wichtige NP-vollständige Probleme:

- 3-SAT und ähnliche Probleme
- 0-1-Knapsack, Subset Sum
- Vertex Cover und ähnliche Probleme
- Hamiltonkreis, TSP (Entscheidungsvariante) und ähnliche Probleme

Auch hier: nicht nur Definitionen und Reduktionen kennen, auch Ideen verstanden haben.
Reduktion aus der Vorlesung kam schon in mehreren Klausuren vor (ausführen, anpassen).

Reductionen

Gegeben:
Problem B unbekannter Komplexität
Problem A bekannter Komplexität

die wollen wir einordnen.

Problem $A \leq_p$ Problem B
„reduziere A auf B“

Mindset: Ich kann so bescheuerte Instanzen in Problem B bauen, dass ein Algorithmus, der smart genug ist, um die zu lösen, ganz nebenbei auch jede Instanz aus A lösen können muss.

→ Problem B ist mindestens so schwer wie Problem A

Reduktionen

$T(I_A)$ und $T^{-1}(I_A)$ besitzen polynomielle Laufzeit.

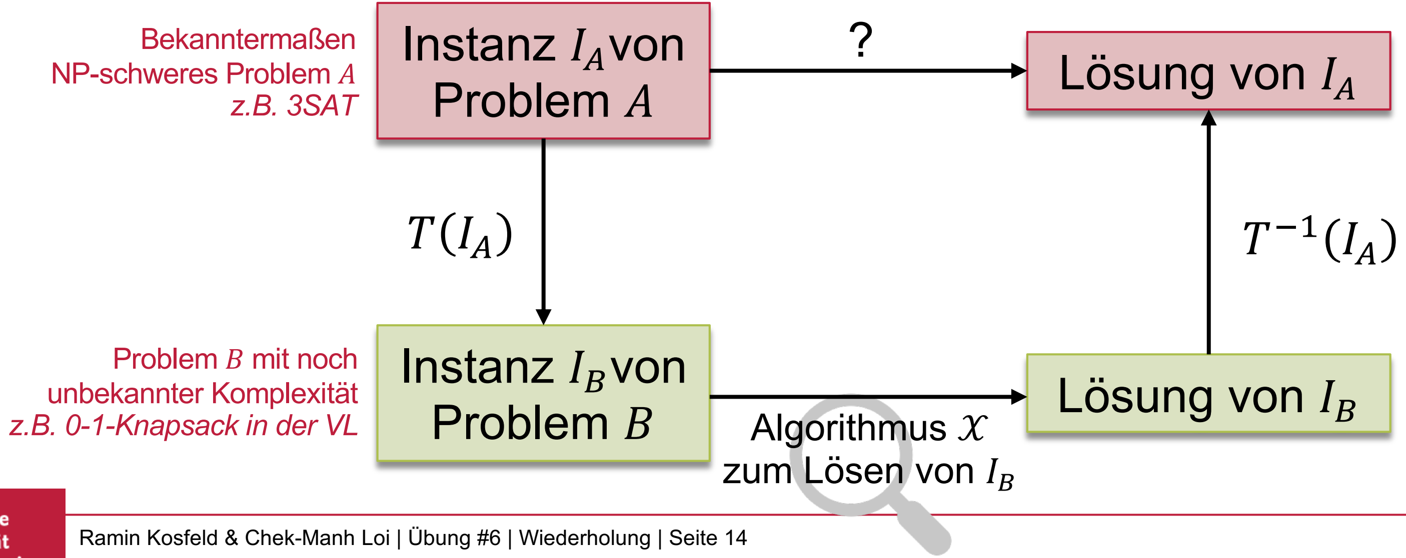
Daher: Besitzt $\mathcal{X}$ polynomielle Laufzeit, dann könnten wir die Lösung von I_A in polynomieller Zeit bestimmen.

Aber Problem A ist NP-schwer! Damit kann $\mathcal{X}$ nicht in P sein!

Wir sagen:

"Wir reduzieren (von) 3SAT auf 0-1-Knapsack"

3SAT $\leq_p$ 0-1-Knapsack



Was tun bei NP-Vollständigkeit?

	Heuristik

Was tun bei NP-Vollständigkeit?

	Heuristik	Approximation	Exakt
Vorteil	Sehr schnelle und oft sehr gute Lösungen.	Gibt Garantien für den Wert der Lösung.	Geben den optimalen Wert aus.
Nachteil	Kann beliebig schlecht sein.	Oft nicht optimal, da der Worst-Case abgefangen werden muss.	Sie sind sehr langsam.
Beispiel	Greedy_0	Greedy_k	B&B, DP

Hashing

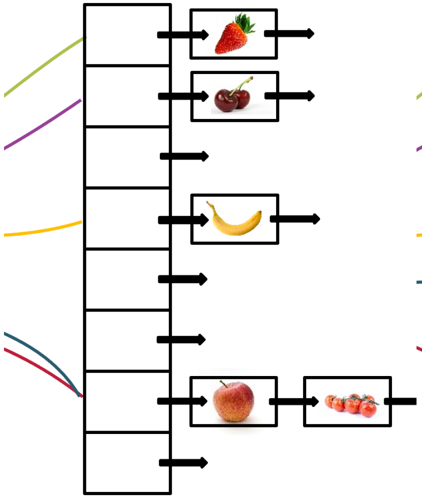
Beliebige (Zahlen) Daten beliebiger Länge

Hashfunktion

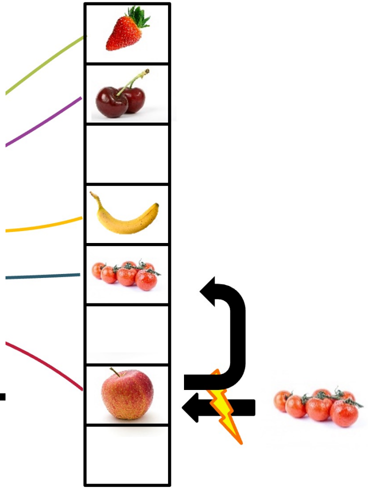
Zahl (Hash) aus endlicher Menge von Zahlen

17

Speichere Eintrag an richtiger Stelle in Hashtabelle



…mit Listen



…mit offener Adressierung

Kollisionen lösen?

Zusammenfassung

Das war bereits unser ganz grober
Überblick über das Semester :)

Gibt es noch Fragen?

Klausur

Klausurvorbereitung

Was man wissen sollte:

- Alles aus der Vorlesung (außer explizite Exkurse, dazu höchstens grundlegende Fragestellungen)
- Natürlich nicht detaillierter als in der Vorlesung
- Übersicht bzw. einzelne größere Konzepte/Ideen aus Übungen/Hausaufgaben
- Notation bei Rechenaufgaben i.d.R. wie in Hausaufgaben
- Schema wird grundsätzlich ähnlich wie alte Klausuren
- Altklausuren: Gut für die Vorbereitung!
    - Hausaufgabenzettel und GÜ danach auch
- Fragen: Mail an Tutoren oder uns (Sprechstunde ist auch eine Option)
- Ca. 1 Woche vor Klausur *Tutoren-Sprechstunde* (Webseite und Mails beachten)

Klausurinfos

Steht alles auf der Webseite :)

anmelden.

Klausur

Jaja, bald ist es schon wieder soweit 😳

Die Klausur für Algorithmen und Datenstrukturen 2 findet am **Freitag, den 02. August 2024** von **15:30-17:30** im **Audimax** statt.

Bitte denkt an die folgenden Punkte:

- Seid *mindestens* 15 Minuten früher anwesend!
- Bringt die folgenden Sachen mit:
  - Studierendenausweis (plus Lichtbildausweis, falls kein Foto vorhanden),
  - dokumentenechter Stift (kein Bleistift, kein rot!)
  - Wörterbuch, falls ihr das benötigt
- Weitere Unterlagen sind nicht erlaubt!
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt, wir stellen Papier

Hausaufgaben

Eckdaten:

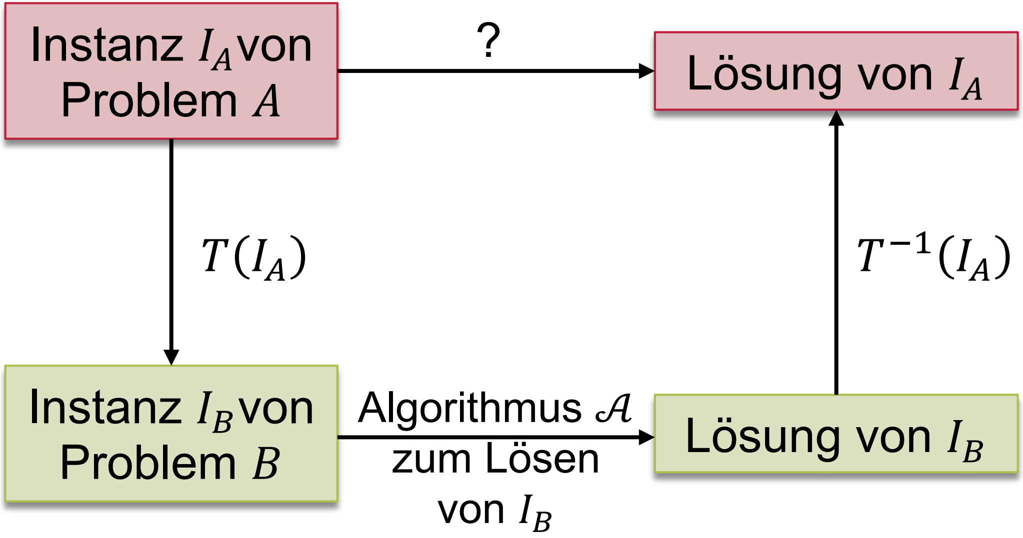
- **Freitag, 02.08.2024, 15:30-17:30 Uhr** (2h Bearbeitungszeit, spätestens 15:15 ankommen!)
- Im **Audimax**
- Studierende mit Nachteilsausgleich: Extra-Raum/individuelle Absprache
- (Kurzfristige Infos werden über den Verteiler bekannt gegeben)
- Einsichtstermin wird vmtl. nach der Klausur auf der Webseite und per Verteiler bekannt gegeben

Wiederholung I
Reduktion

Reduktionen

$T(I_A)$ und $T^{-1}(I_A)$ besitzen polynomielle Laufzeit.

Daher: Besitzt $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit, dann können wir die Lösung von I_A in polynomieller Zeit bestimmen.



3SAT-3

Gegeben: Formel wie bei 3SAT, aber jede Variable kommt in maximal drei Klauseln vor.
Frage: Lässt sich die Formel erfüllen?

… ist das nicht das Gleiche wie 3SAT?

→ Nein, nur *Teilmenge* aller 3SAT-Instanzen. Es könnte auch sein, dass die einfacher zu lösen sind.

… okay, *ist* das den hier so? (Liegt 3SAT-3 in P? Oder ist es NP-vollständig, so wie 3SAT selber? …)

Unsere Optionen:
Polyzeit-Algorithmus finden (P) oder NP-Reduktion finden (NP-schwer).

3SAT-3

Gegeben: Formel wie bei 3SAT, aber jede Variable kommt in maximal drei Klauseln vor.
Frage: Lässt sich die Formel erfüllen?

Dieses Problem ist NP-schwer!

Wir zeigen: 3SAT $\leq_p$ 3SAT-3

Problematisch nur Variablen, die öfter als drei Mal vorkommen.

Wie können wir das auflösen?

Idee: Stellvertretervariablen, die alle zusammen denselben Wert haben müssen!

3SAT-3

$(x_i \vee x_j \vee x_k)$ $(\bar{x}_i \vee \bar{x}_o \vee x_q)$ $(x_i \vee \bar{x}_p \vee x_j)$ $(x_i \vee x_p \vee \bar{x}_o)$

Für jedes der n_i Literale von Variable x_i:

- Erzeuge Variablen $x_{1,i}, \dots, x_{n_i,i}$.
- Ersetze das c-te Literal von x_i mit einem Literal der Variablen $x_{c,i}$.
- Füge Klauseln der folgenden Form hinzu.

$$(x_{1,i} \vee \bar{x}_{2,i}) \wedge (x_{2,i} \vee \bar{x}_{3,i}) \wedge \dots \wedge (x_{n_i,i} \vee \bar{x}_{1,i})$$

$$\text{Äquivalent: } (x_{2,1} \rightarrow x_{1,i}) \wedge (x_{3,i} \rightarrow x_{2,i}) \wedge \dots \wedge (x_{n,i} \rightarrow x_{1,i})$$

Beobachtungen:

- Die neuen Variablen tauchen genau drei Mal auf.
- Ist eine Variable auf *true* gesetzt, sind alle *true*. (Repräsentieren die gleiche Variable!)
- Die alte Variable taucht nicht mehr auf.

~~Wiederholung II~~
Branch & Bound

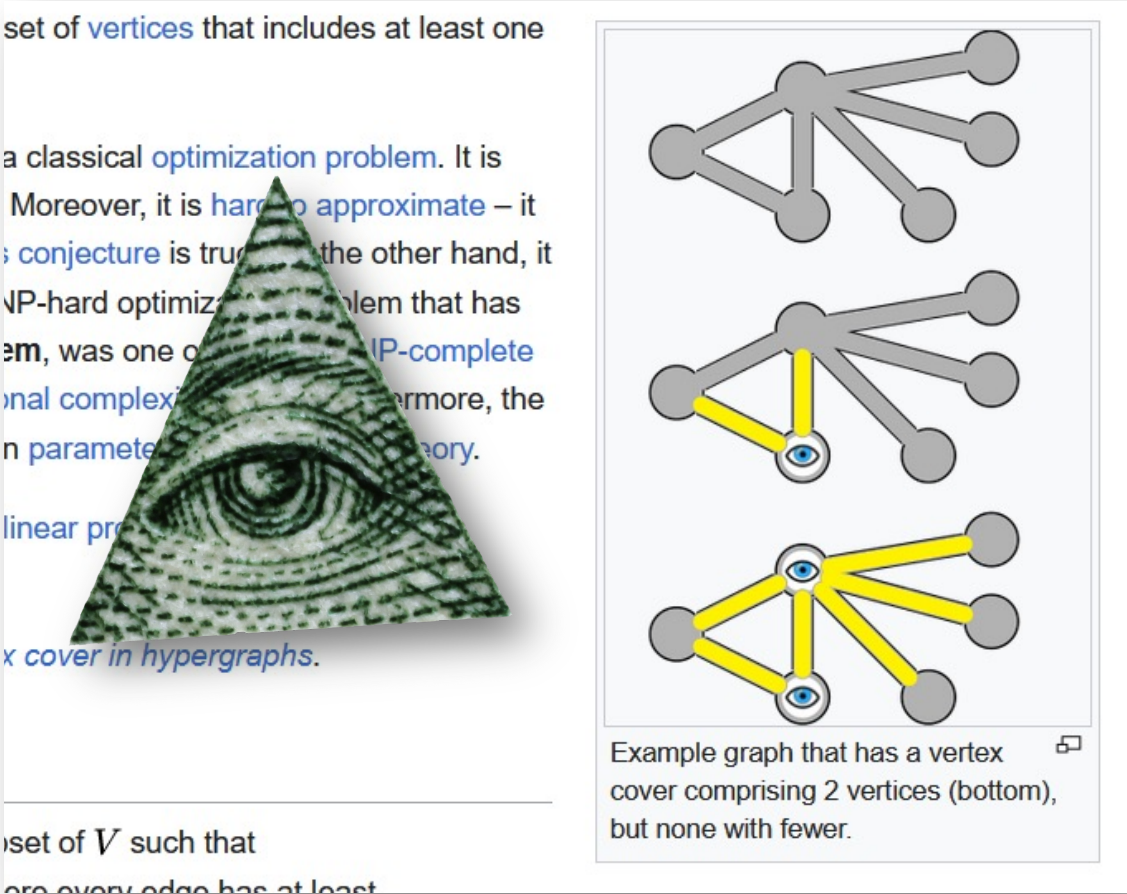
Eher ein Ausblick. Schon komplizierter als das, was wir bisher so gesehen haben

Grundidee B&B

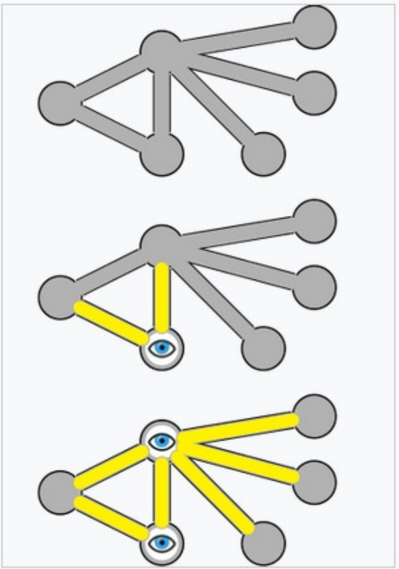
Suche nach einer optimalen Lösung:

- Durchsuche strukturiert den gesamten Suchraum (wie vollständige Enumeration)
- D.h. wir haben Suchbaum (jeder Knoten hat einzigartige Teilbelegung)
- Wurzel: leere Teilbelegung, Blätter: vollständige Belegung
- Bei n binären Entscheidungen: 2^n Blätter im Worst Case
- Spare Arbeit:
  - Prüfe in jedem Knoten die Zulässigkeit
  - Berechne während der Suche Lösungen (z.B. an jedem Knoten Greedy_0 bei Knapsack)
  - Berechne für jeden Knoten Schranken (z.B. Upper Bound durch Fractional Greedy)
  - Die Schranken gelten für ganze Teilbäume unter ihrem Knoten
  - Falls die Schranke sagt, dass es keine bessere Lösung geben kann: Abschneiden!
- Oft kommt (in der Praxis) noch Propagation hinzu (was folgt aus der Teilbelegung?)

Vertex Cover



Minimum Vertex Cover



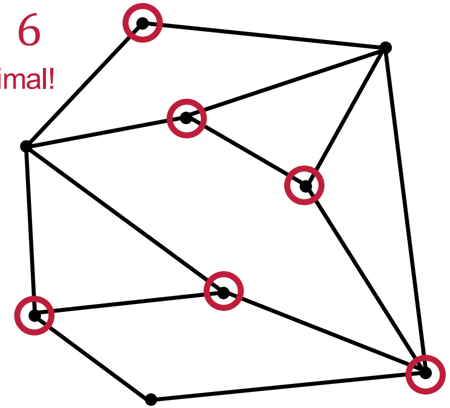
Example graph that has a vertex cover comprising 2 vertices (bottom), but none with fewer.

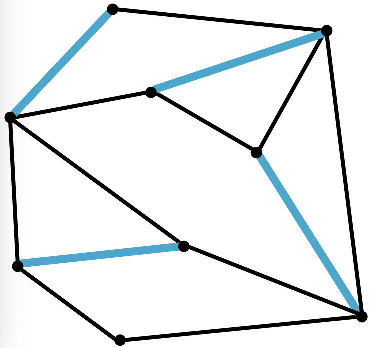
Suche die kleinste Menge $VC \subseteq V$, sodass die Knoten in VC jede Kante abdecken!

NP-schwer!

$|VC| = 6$

Hier aber *nicht* minimal!





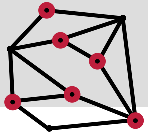
Maximales Matching:
Suche maximale Menge (2 Typen) von Kanten, die sich nicht berühren.

Liegt in P.

Wähle 1 Knoten pro Kante:
Untere Schranke für Min VC

Wähle 2 Knoten pro Kante:
Obere Schranke für Min VC

Branch & Bound für Vertex Cover



Angenommen, wir wollten Vertex Cover mit Branch & Bound lösen

- Gegeben Graph $G = (V, E)$, gesucht Vertex Cover C (möglichst klein)
- Alle Kanten müssen einen Endpunkt in C haben
- Unsere Entscheidungsvariablen: $x_v \in \{0,1\}$ für jeden Knoten $v \in V$

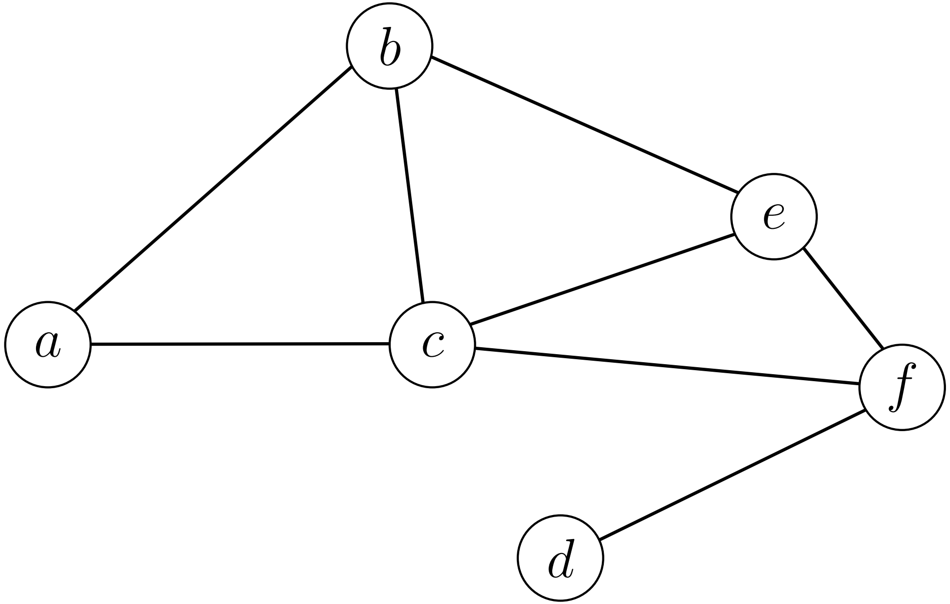
Was brauchen wir?

- Untere Schranke
- Obere Schranke
- Aufteilung des Suchraums
- Propagation (dieses Semester nur am Rande behandelt)

Branch & Bound für Vertex Cover

Propagation:

- Wir fangen mit Propagation an, damit wir aus Teilbelegungen Teilprobleme kriegen, die i.W. wieder Vertex Cover sind!
- Regeln:
  - Was, wenn $x_a = 0$?
  - Dann müssen $x_b = x_c = 1$ sein!
  - Was, wenn $x_b = x_c = 1$?
  - Dann können wir oBdA $x_a = 0$ setzen!
  - Was ist mit x_d?
  - Können wir oBdA auf 0 setzen!



Propagation für Vertex Cover: Allgemeine Regeln

Regeln: Gegeben Teilbelegung

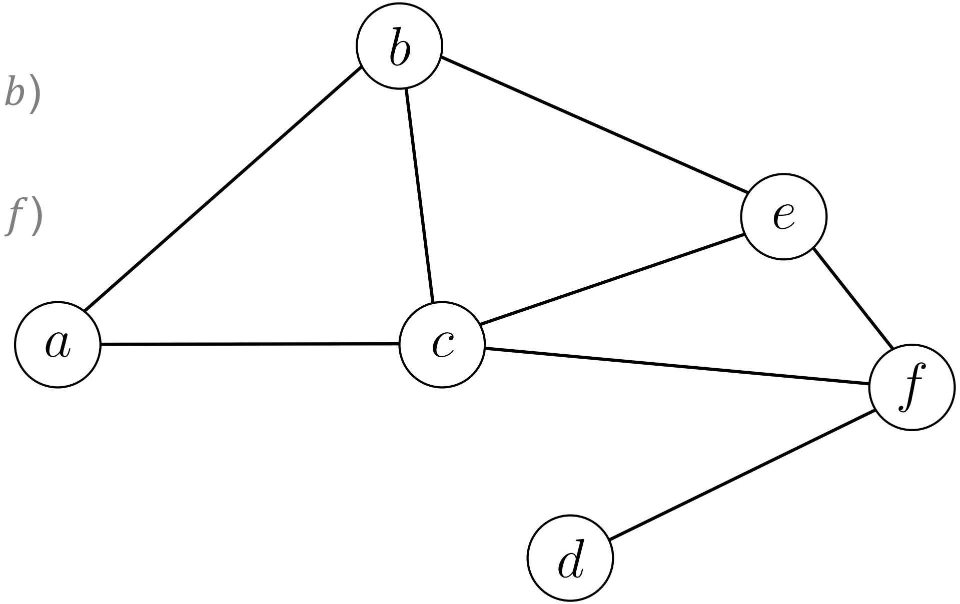
- Wenn $x_v = 0$, dann $x_u = 1$ für alle $uv \in E$
- Wenn für einen unbelegten Knoten v gilt: $x_u = 1$ für alle $uv \in E$, setze $x_v = 0$
- Wenn ein unbelegter Knoten v nur eine nicht-überdeckte Kante $uv \in E$ mit $x_u \neq 1$ hat:
  - Falls u mehr als eine nicht-überdeckte Kante hat: Setze $x_u = 1, x_v = 0$
  - Sonst (isolierte nicht-überdeckte Kante uv): Setze $x_u = 1, x_v = 0$ oder $x_u = 0, x_v = 1$
- Anwendung dieser Regeln liefert erweiterte Teilbelegung
- Wir können belegte Knoten und überdeckte Kanten entfernen und erhalten einen kleineren Graphen G', auf dem wir wieder Vertex Cover lösen können
- Die Lösung für Vertex Cover auf dem kleinen Graphen G' können wir mit der erweiterten Teilbelegung auf den gesamten Graphen erweitern

Beispiel

Angenommen, Teilbelegung $x_c = 1$

Regeln anwenden:

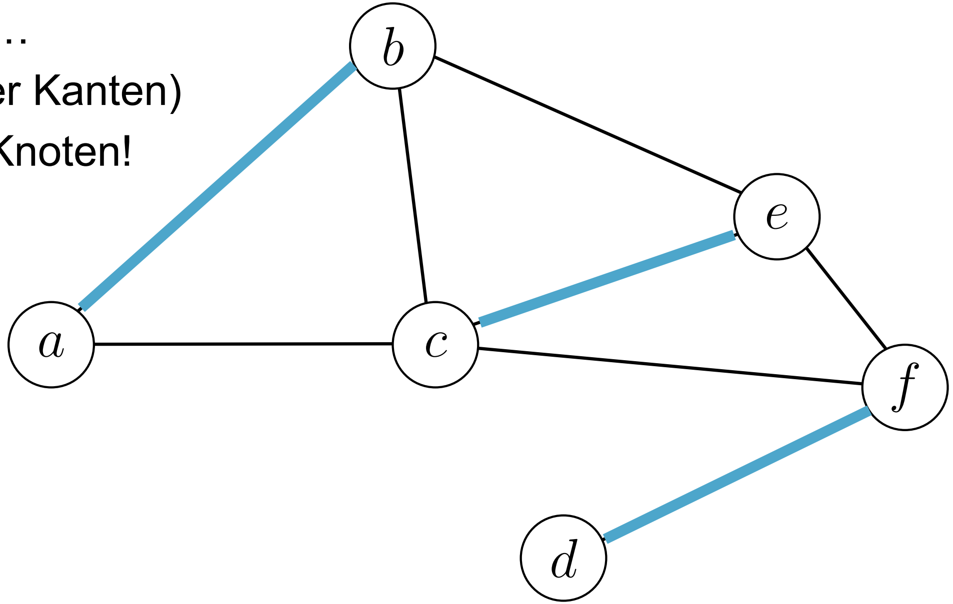
- a hat nur eine nicht-überdeckte Kante (zu b)
  - Setze $x_a = 0, x_b = 1$
- d hat nur eine nicht-überdeckte Kante (zu f)
  - Setze $x_d = 0, x_f = 1$
- e hat nur überdeckte Kanten
  - Setze $x_e = 0$
- Resultierender ‘kleiner Graph’ G’ ist leer!
- Optimales VC auf leerem Graph: $C' = \emptyset$
- Ergänzung aus Teilbelegung: $C = \{b, c, f\}$



Untere Schranke

Wie viele Knoten brauchen wir mindestens?

- Ideen? Wir haben das schonmal gesehen…
- Matching! (Menge paarweise unabhängiger Kanten)
- Für jedes Matching M: wir brauchen $\geq M$ Knoten!
- Idee: Bestimme Maximum Matching
- Geht in polynomieller Zeit (siehe: NWA)
- Liefert uns untere Schranke!



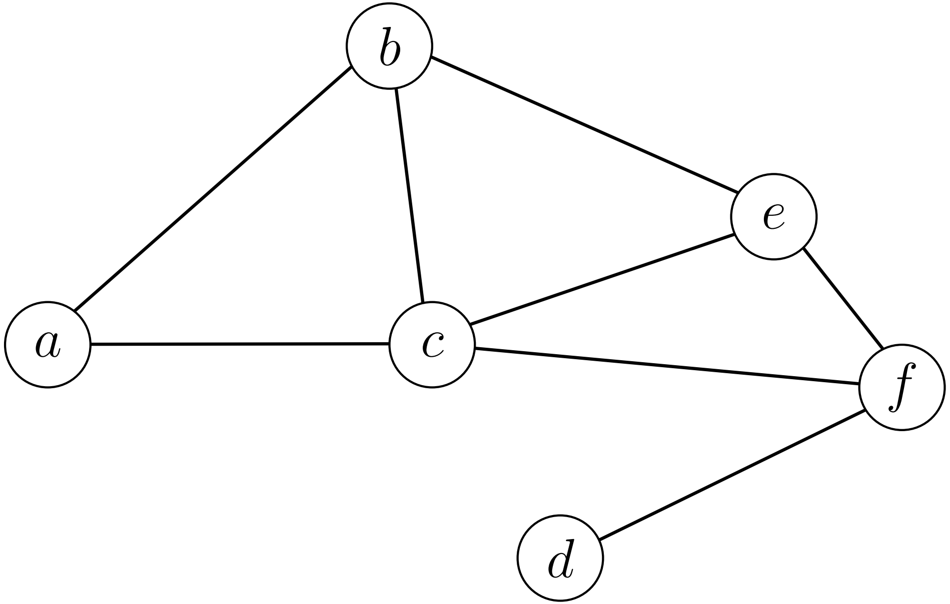
Beispiel hier:

- $M = \{ab, ce, df\}$, untere Schranke 3

Obere Schranke

Wie viele Knoten brauchen wir höchstens?

- Finde heuristisch Lösungen
- Z.B. durch maximales Matching
  - Solange es unabgedeckte Kanten gibt:
    - Wähle beliebige unabgedeckte Kante
    - Füge beide Endpunkte ein
  - Liefert 2-Approximation
- Können auch *Greedy-Heuristik* nutzen
- …



*hier werden zwei verschiedene Matching-Typen für die untere und obere Schranke verwendet, maximal ist nur inklusionsmaximal, maximum ist kardinalitätsmaximal. Siehe Große Übung #4. Das hier ist ja eh eher als Ausblick gedacht.

Aufteilung des Suchraums

Idee:

- Bei Knapsack sind wir strikt in aufsteigender Reihenfolge durch die Variablen gegangen
- Können in jedem Knoten des Suchbaums *irgendeine* **nicht festgelegte** Variable nehmen!
- Betrachte irgendeine nicht abgedeckte Kante uv
- Betrachte die zwei Fälle: $x_u = 0, x_v = 1$ und $x_u = 1$
- Falls keine solche Kante existiert, sind wir in einem Blatt
  - Alle Variablen durch Propagation belegt
  - Restlicher Graph ist leer

Gesamtalgorithmus

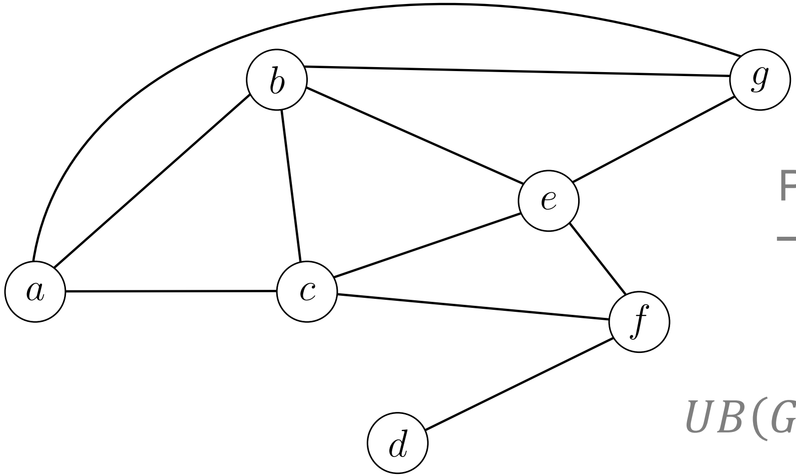
Gegeben Graph $G = (V, E)$

Globale Variable: obere Schranke $P = n$, beste Lösung $B = V$

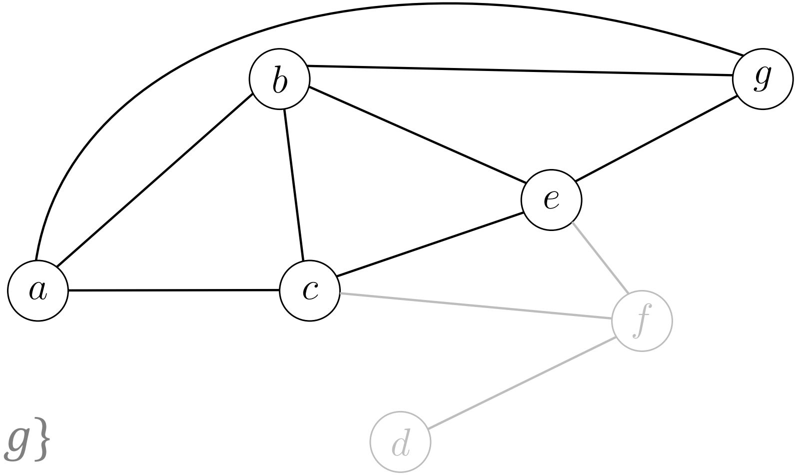
Routine `VertexCoverBB(Graph G,Teilbelegung T)`:

- Wende Propagation an, erhalte G', T'
- Sei $C_f = \{v \in V \mid T'(x_v) = 1\}$
- $U = UB(G') \cup C_f$
- Falls $|U| < P$: $P = |U|$, $B = U$
- Falls G' leer: **return**
- $L = LB(G') + |C_f|$
- Falls $L \geq P$: **return**
- Wähle Kante $uv \in G'$
- `VertexCoverBB`$(G', T' \cup \{x_v = 0\})$
- `VertexCoverBB`$(G', T' \cup \{x_v = 1\})$

Beispiel: Wurzel des Suchbaums



Propagation



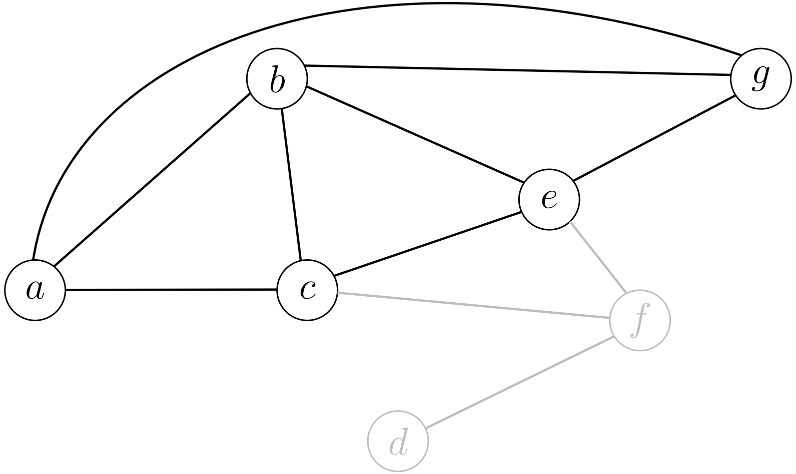
$$UB(G') = \{a, b, c, g\}$$

$$B = \{a, b, c, f, g\}, P = 5$$

$$LB(G') = |\{ab, ce\}|, L = 3$$

$$x_f = 1, x_d = 0$$

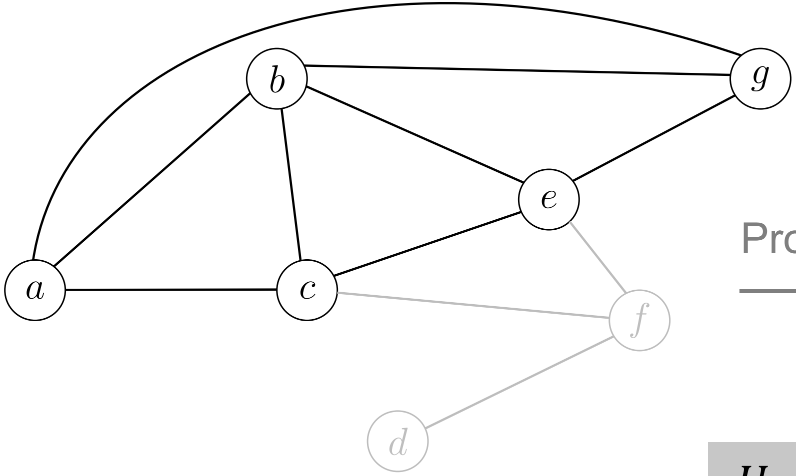
Beispiel: Wurzel des Suchbaums - Entscheidung



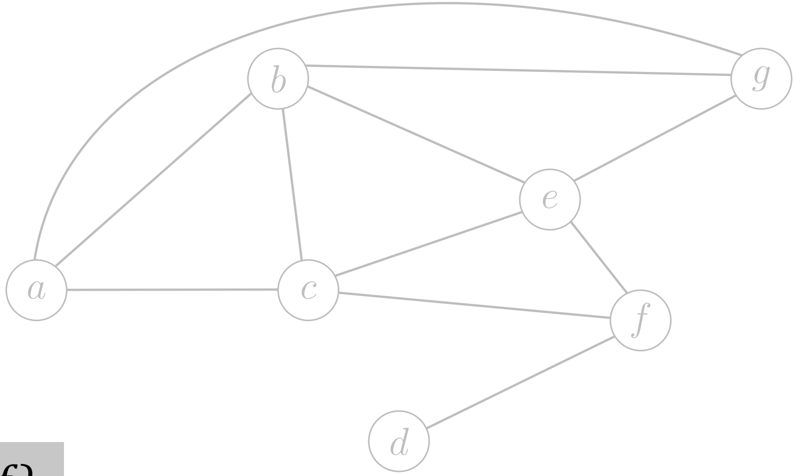
$x_f = 1, x_d = 0$

Fall 1: Setze $x_c = 0$
Fall 2: Setze $x_c = 1$

Beispiel: Fall $x_c = 0$



Propagation



$x_f = 1, x_d = 0, x_c = 0$

$U = \{a, b, e, f\}$

$B = U, P = 4$

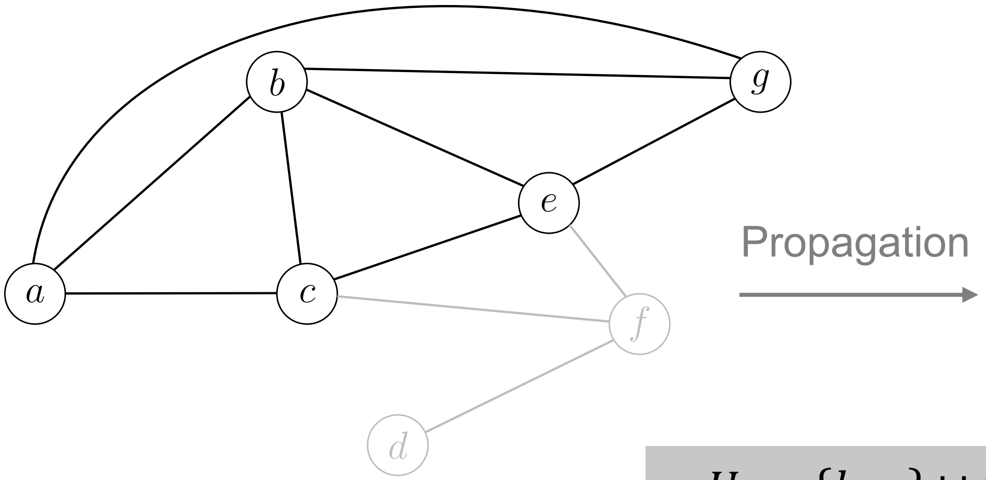
return (da leer)

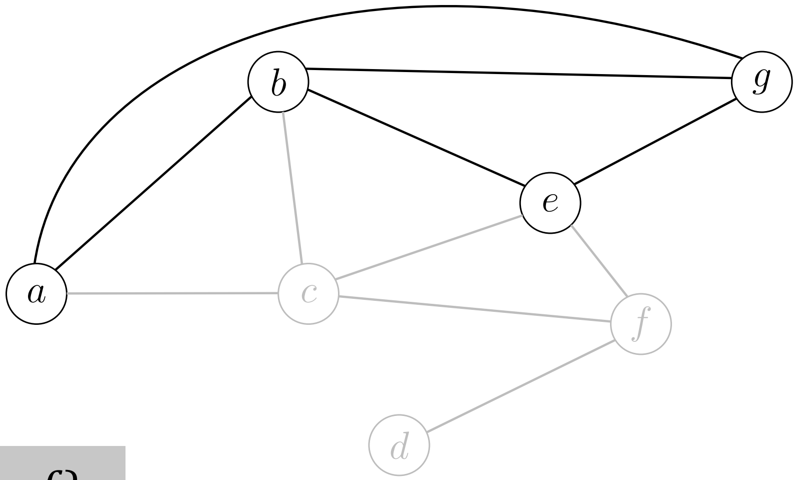
$x_f = 1, x_d = 0, x_c = 0$

$x_a = 1, x_b = 1, x_e = 1$

$x_g = 0$

Beispiel: Fall $x_c = 1$





$x_f = 1, x_d = 0, x_c = 1$

$U = \{b, g\} \cup \{c, f\}$

$L = |\{ab, eg\}| + 2 = 4$

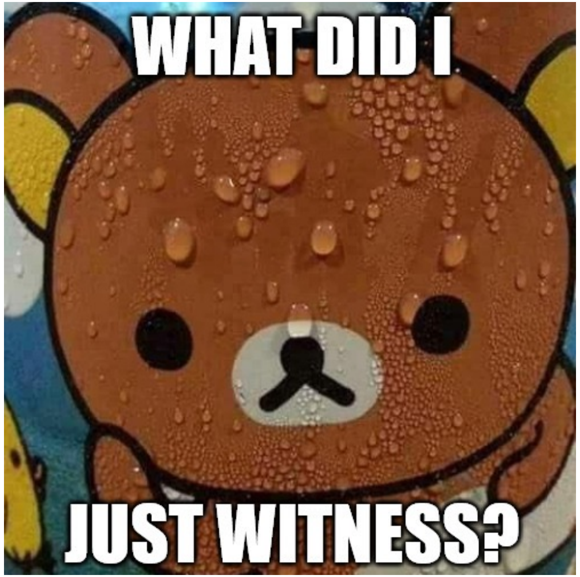
return (da $L \geq P$)

$x_f = 1, x_d = 0, x_c = 1$

B&B für Vertex Cover

Takeaway hier:

- B&B kann sehr gut zur Lösung von verschiedensten Arten von NP-schweren Problemen genutzt werden.
- Der Algorithmus muss stets *an das individuelle Problem angepasst werden.*
  - Worüber wird gebranched? Hier z.B. Knoten (oder Kanten)
  - Was sind geeignete obere und untere Schranken, die zum Problem passen?
  - … weitere Optimierungen und Ideen, wie Propagation, geschicktes Wählen und Treffen der nächsten Entscheidung, Bewegung durch den Suchbaum, …



… das wars!

Schöne vorlesungsfreie Zeit
und viel Erfolg bei der Klausur :)

kosfeld@ibr.cs.tu-bs.de

loi@ibr.cs.tu-bs.de