Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #5

Komplexität, Reduktionen und Hashing

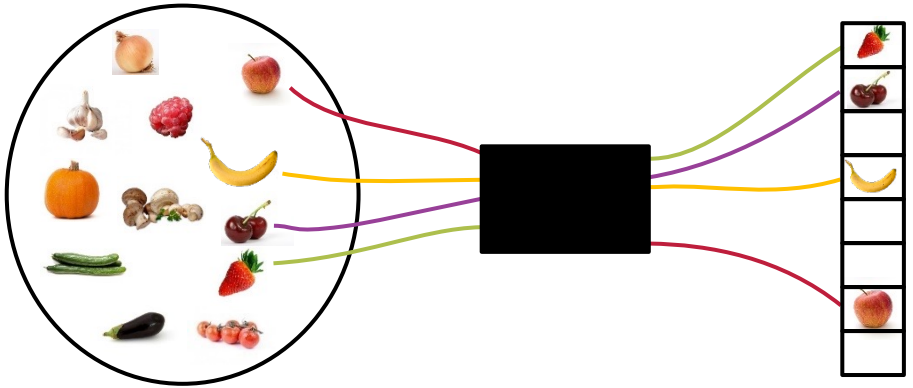
Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

26.07.2024

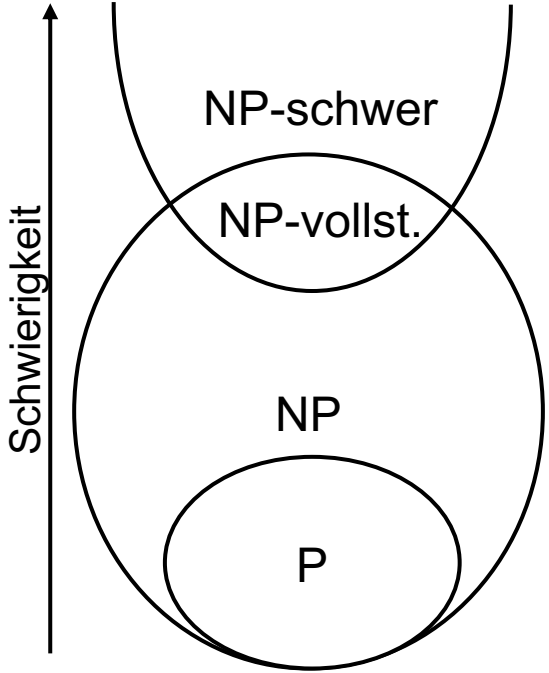
Heute

- Komplexität
- Reduktionen
- Hashing
- Modulo

$$\varphi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



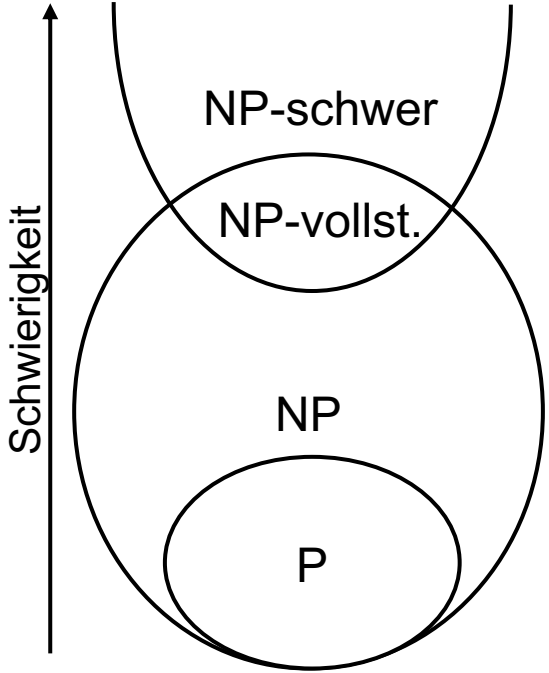
Komplexitätsklassen



P: Probleme lassen sich effizient lösen.

NP: Lösungen können effizient verifiziert werden.

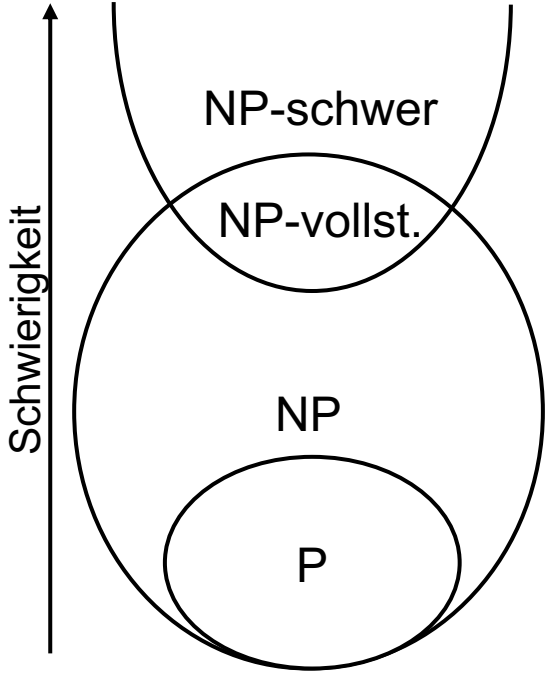
Komplexitätsklassen



P: Probleme lassen sich effizient lösen.

NP: Lösungen können effizient verifiziert werden.

Komplexitätsklassen



P: Probleme lassen sich effizient lösen.

NP: Lösungen können effizient verifiziert werden.

NP-schwer: Wenn das Problem in P liegt, gilt P=NP.

NP-vollständig: Problem liegt in NP und ist NP-schwer.

NP-Schwere

Ein Problem Π heißt *NP-schwer*, falls für jedes Problem $\Pi' \in$ NP eine Polynomialzeit-Reduktion von Π' auf Π existiert.

In der Literatur wird oft auch $\Pi' \leq_p \Pi$ geschrieben, wenn es eine Polynomialzeit-Reduktion von Π' auf Π gibt.

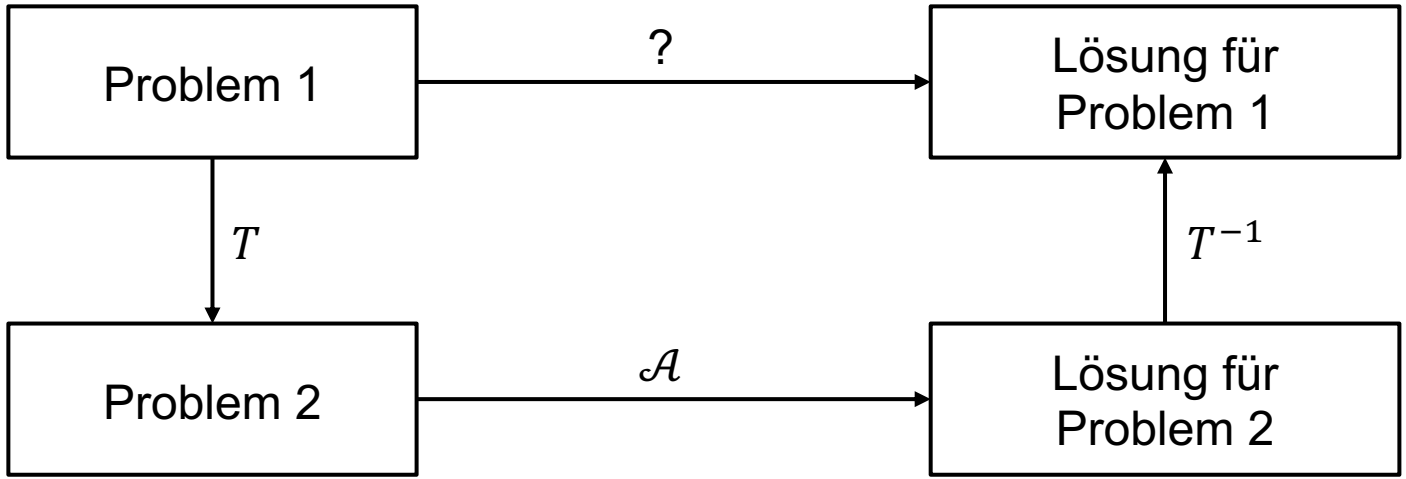
$\Pi' \leq_p \Pi$ heißt, man kann in polynomieller Zeit eine Instanz I' von Π' in eine Instanz I von Π transformieren, die eine Ja-Instanz ist gdw. I' eine Ja-Instanz ist.

$\Pi' \leq_p \Pi$: „Π' ist höchstens so schwer wie Π“

Die Relation $\leq_p$ ist transitiv, da man polynomielle Reduktionen verketten kann.

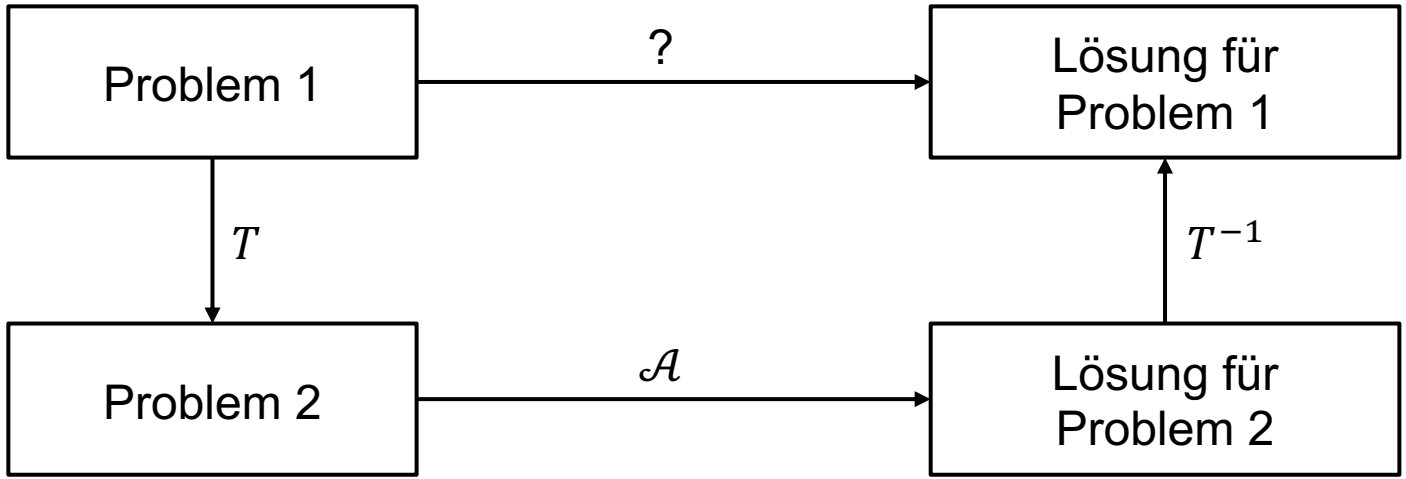
Um zu zeigen, dass ein Problem Π NP-schwer ist, reicht es also, eine Reduktion **von einem** als NP-schwer bekannten Problem Π‘ auf Π durchzuführen.

Reduktionen



Besitzen T, T^{-1} und $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit,
kann Problem 1 in polynomieller Zeit gelöst werden.

Reduktionen

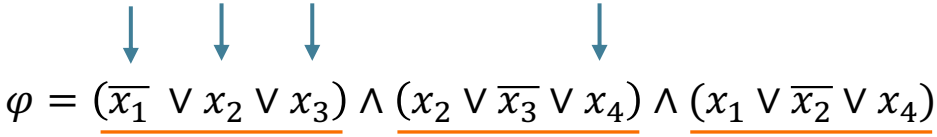


Ist Problem 1 NP-schwer und besitzen T und T^{-1} polynomielle Laufzeit, dann muss Problem 2 auch NP-schwer sein.

Ein paar Probleme

Ein paar Probleme

3-SAT



Gegeben

Logische Formel φ in konjunktiver Normalform mit

- m Klauseln
- n Variablen
- Genau drei Literale pro Klausel

Frage

Gibt es eine φ erfüllende Belegung der Variablen?

Ein paar Probleme

3-SAT

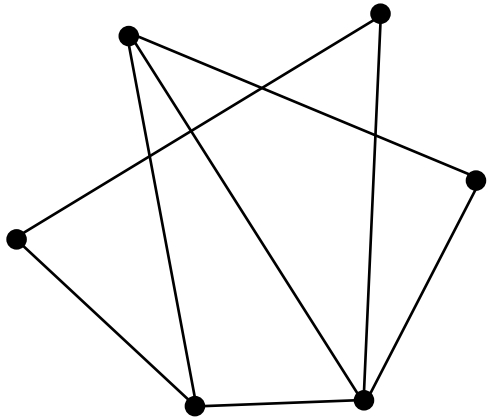
Undirected Hamiltonian Cycle HC

Gegeben

Ungerichteter Graph $\mathrm{G} = (V, E)$

Frage

Gibt es einen Hamiltonkreis in G?



Ein paar Probleme

3-SAT **HC**

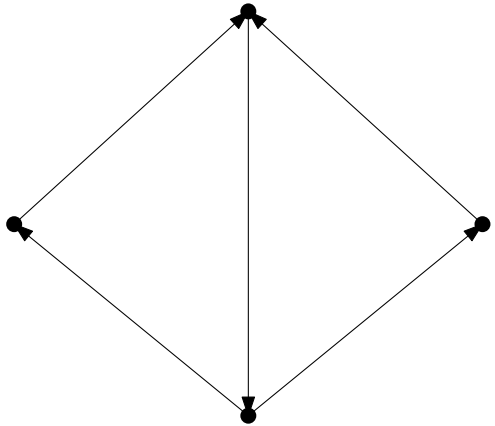
Directed Hamiltonian Cycle DHC

Gegeben

Gerichteter Graph $\mathrm{D} = (V, E)$

Frage

Gibt es einen gerichteten Hamiltonkreis in D?



Ein paar Probleme

3-SAT **DHC** **HC**

Traveling Salesman Problem TSP

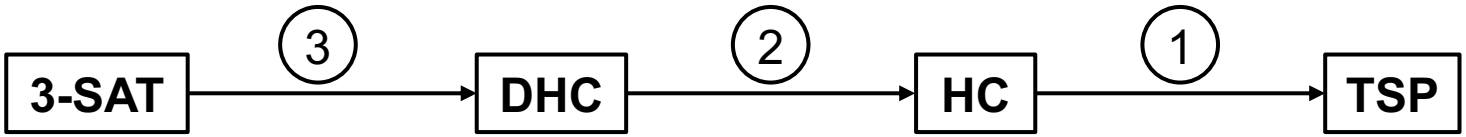
Gegeben

Vollsändiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c: E \to \mathbb{R}^+$ und eine Zahl $k \in \mathbb{R}^+$

Frage

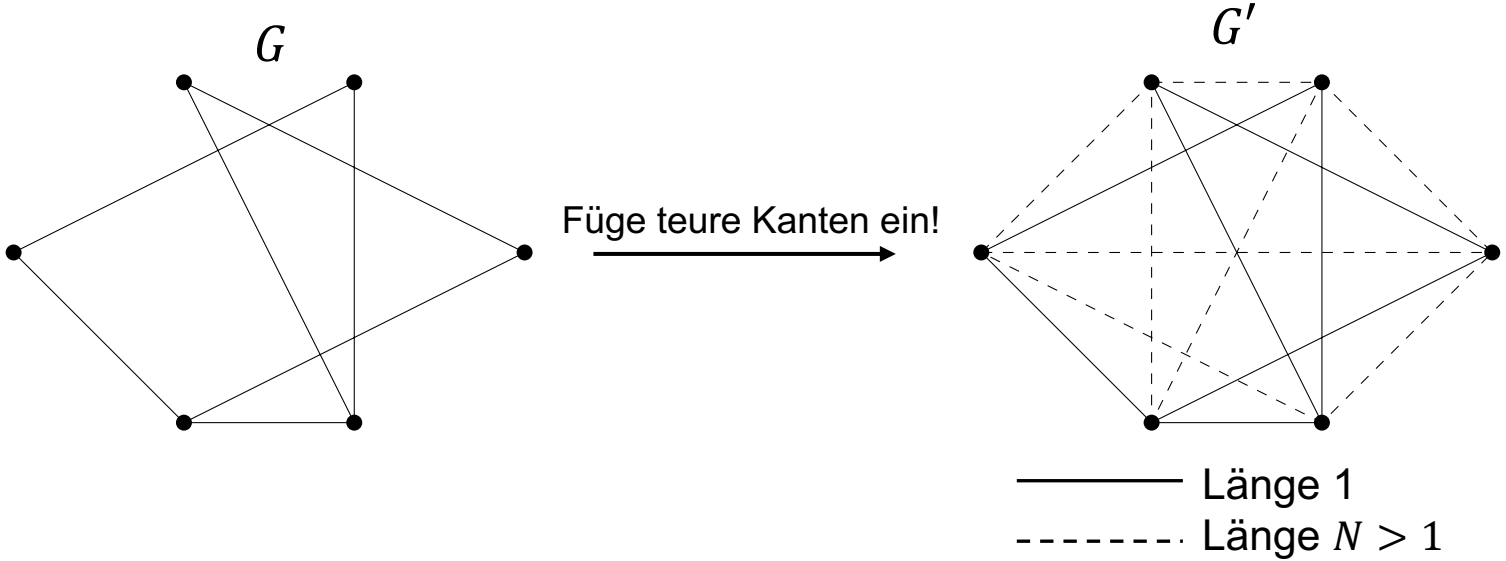
Gibt es eine Tour in G mit Kantenkosten maximal k?

Ein paar Probleme



HC auf TSP

Reduktion von HC auf TSP



Zu zeigen

G besitzt genau dann einen Hamitonkreis, wenn G' eine Tour der Länge $n := |V|$ besitzt.

Beweis Korrektheit

„ ⇒ “

Wähle die gleichen Kanten von G in G'. Diese haben die Kosten n.

„ ⇐ “

Besitzt G keinen Hamiltonkreis, so muss in G' mindestens eine Kante mit Gewicht N benutzt werden. Somit hat die Tour ein Gewicht von mindestens $n - 1 + N > n$, da $N > 1$.

Laufzeit

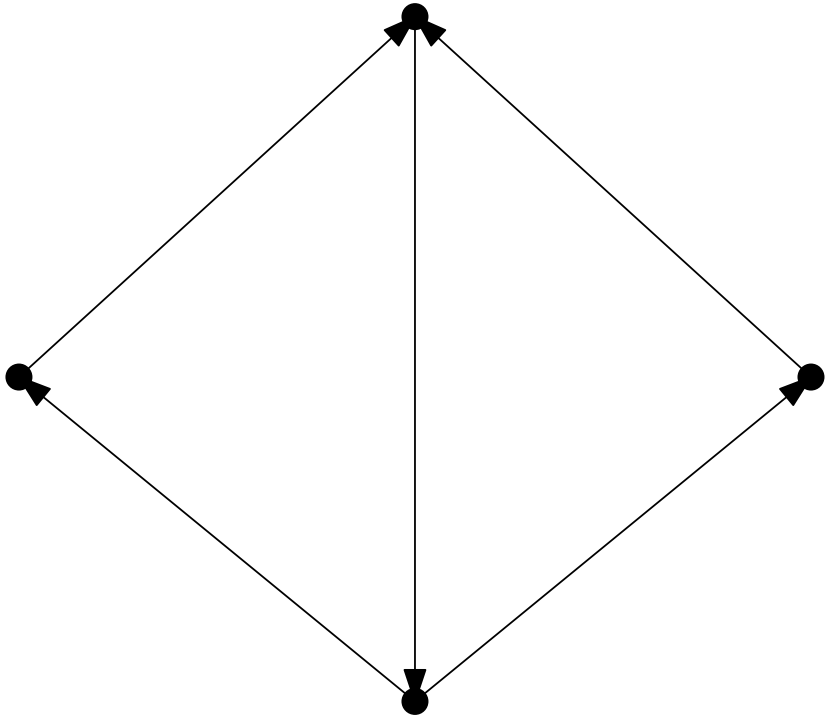
Es müssen $O(n^2)$ Kanten hinzugefügt werden.
Alle $O(n^2)$ Kanten müssen mit Kosten versehen werden.
Insgesamt also eine Laufzeit von $O(n^2)$.

Konsequenz

TSP kann nicht approximiert werden, es sei denn P = NP.

DHC auf HC

Reduktion von DHC auf HC

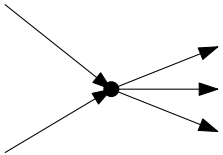


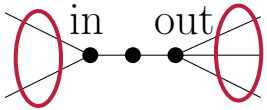
Wie kann man garantieren, dass im ungerichteten Graphen…

…nur eine der ursprünglich *eingehenden* Kanten verwendet wird?

…nur eine der ursprünglich *ausgehenden* Kanten verwendet wird?

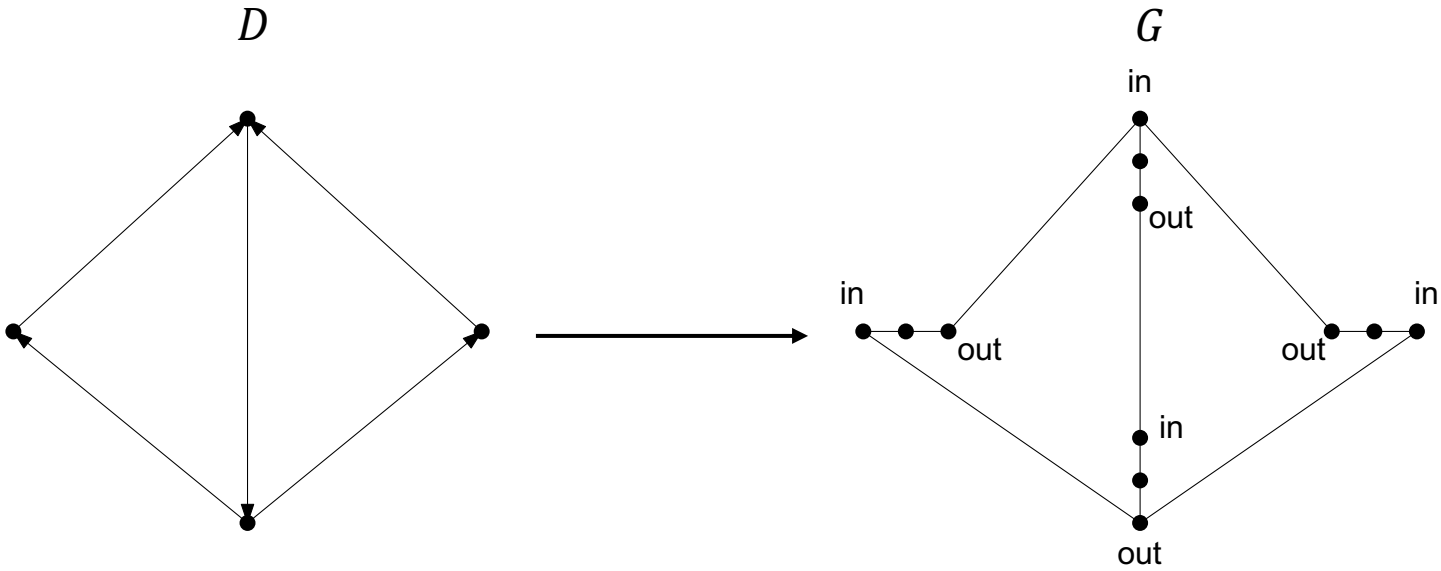
Idee: Teile Knoten auf!





Jeweils nur eine möglich!

Reduktion von DHC auf HC



Zu zeigen

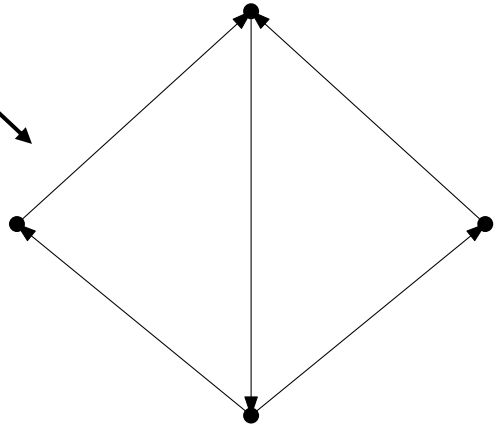
D besitzt genau dann einen gerichteten Hamiltonkreis, wenn G einen Hamiltonkreis besitzt.

3SAT auf DHC

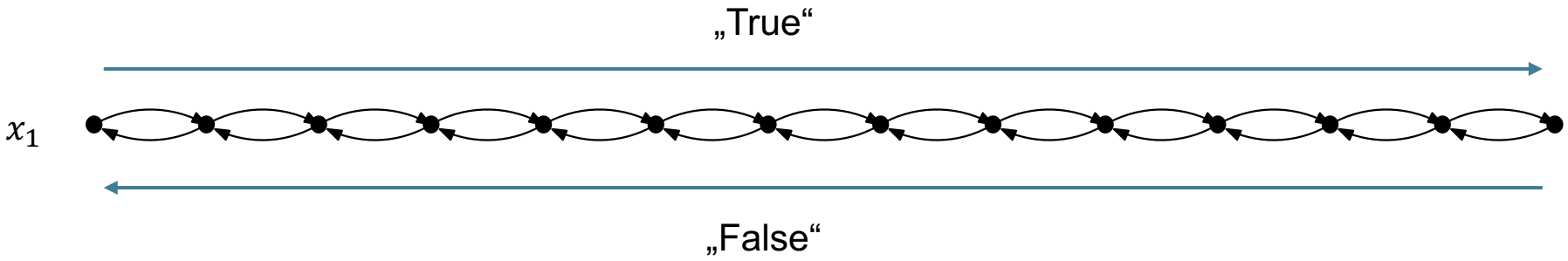
Reduktion 3SAT auf DHC

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

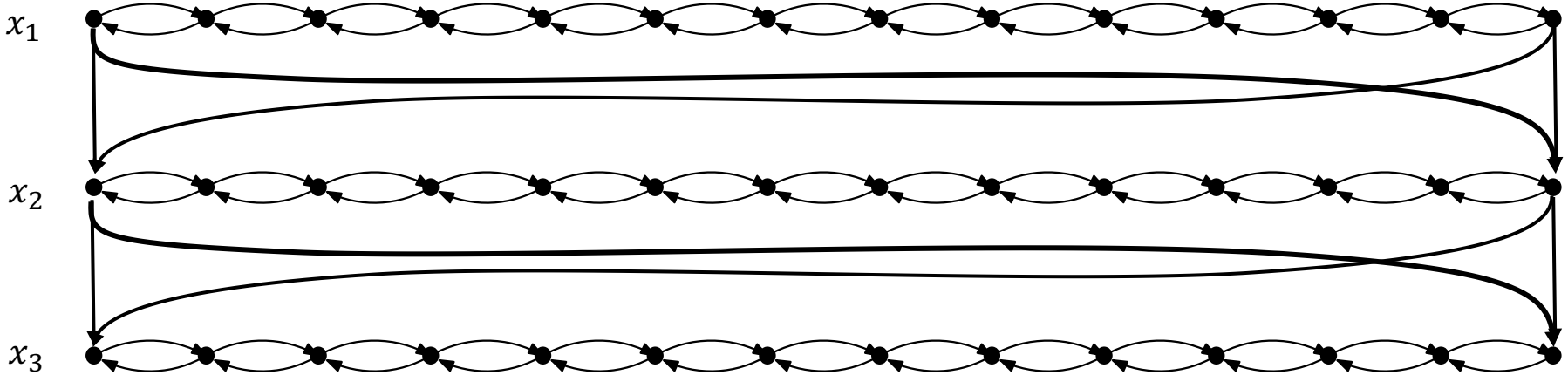
?



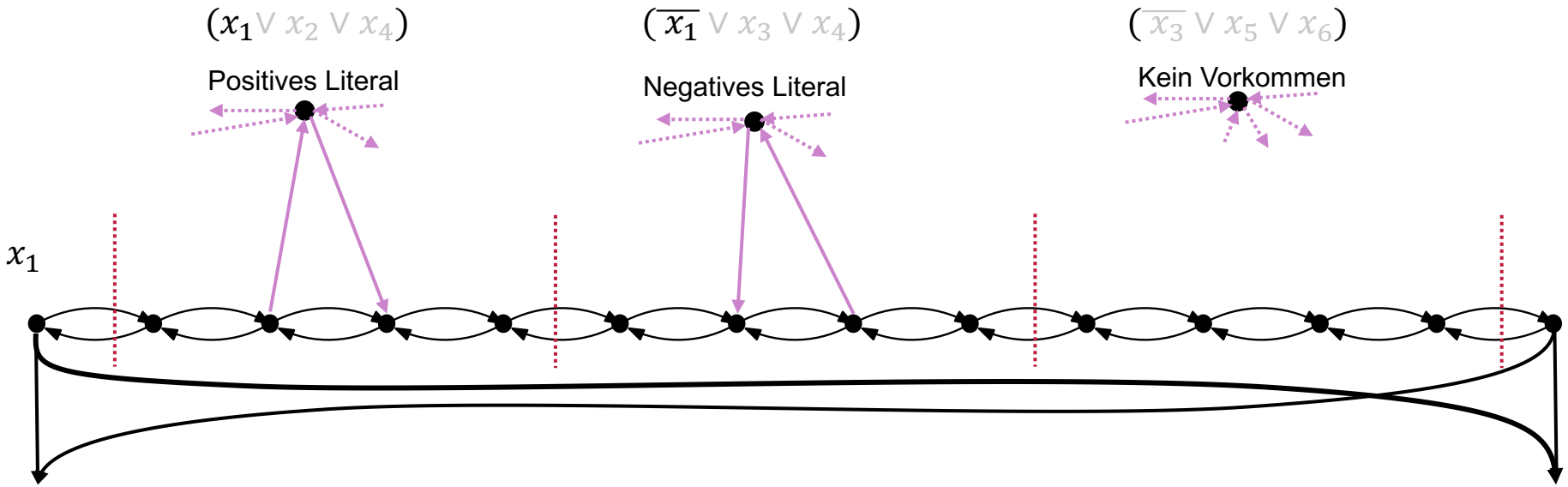
Variablen-Gadgets



Variablen-Gadgets

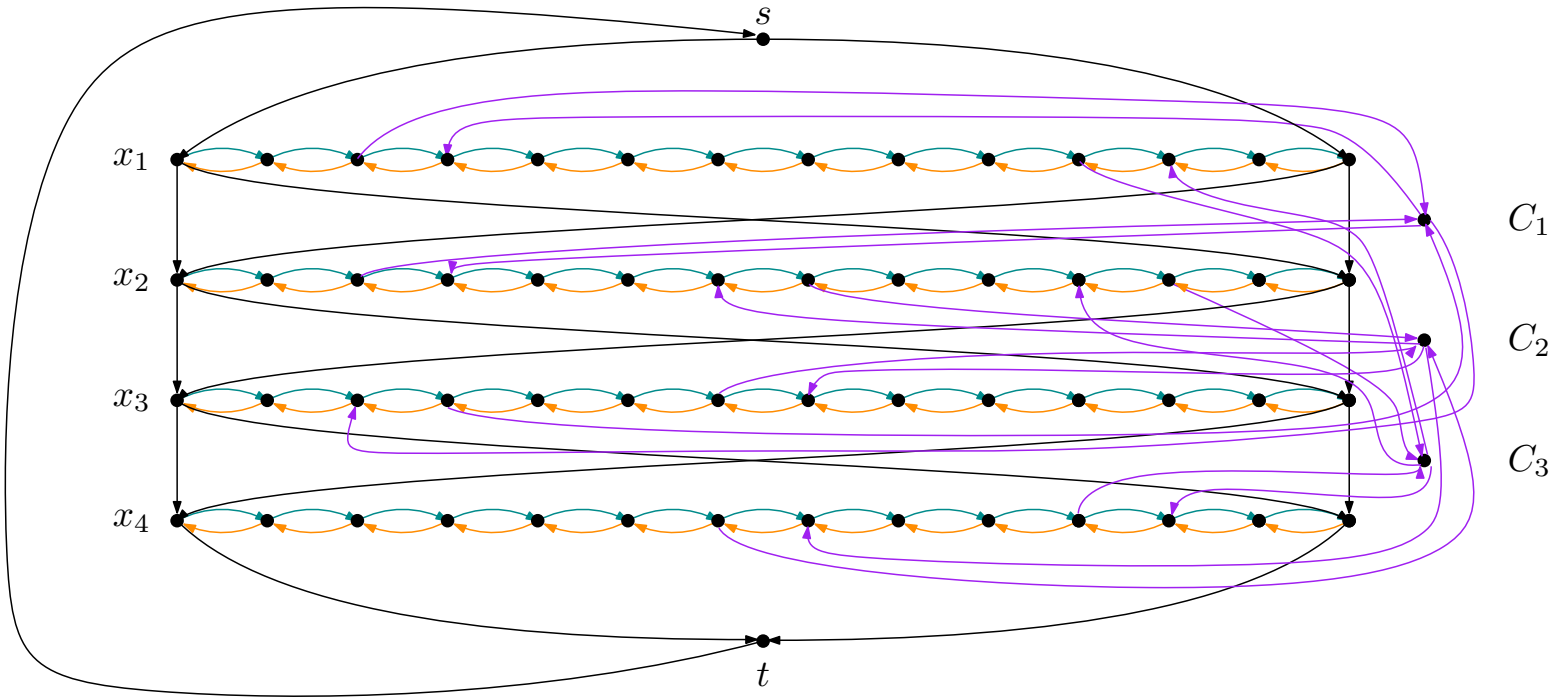


Klausel-Gadgets



Beispiel der Reduktion

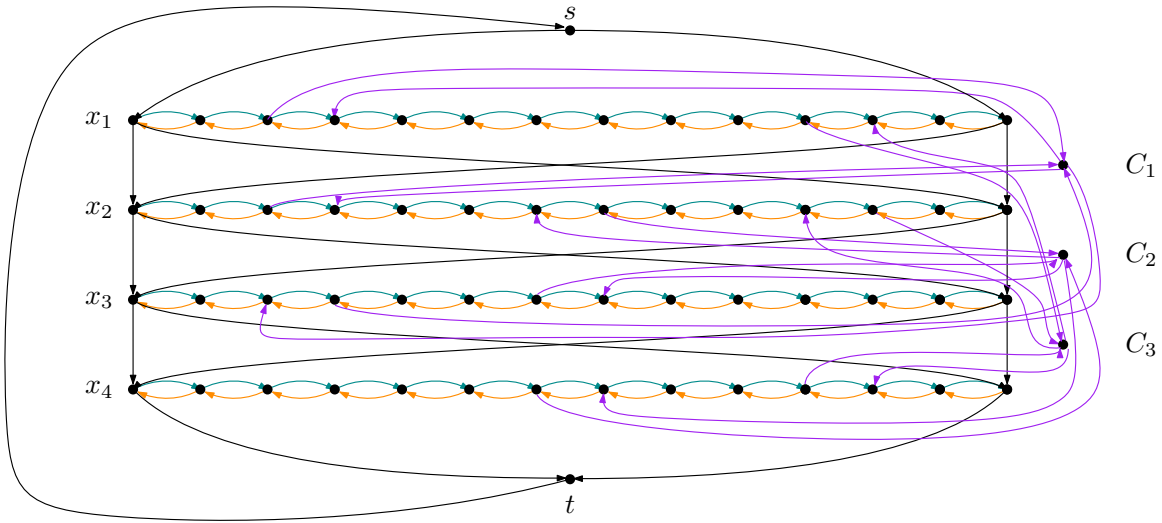
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Korrektheit

„Wenn die Formel erfüllbar ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis.“

Laufe die Variablen Gadgets in der richtigen Richtung ab und laufe zwischendurch die Klauseln ab. (Nach Konstruktion möglich)



Korrektheit

„Wenn die Formel erfüllbar ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis.“

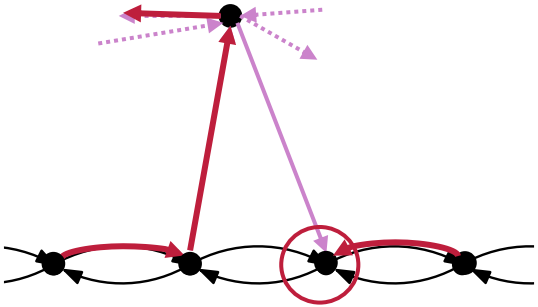
Laufe die Variablen Gadgets in der richtigen Richtung ab und laufe zwischendurch die Klauseln ab. (Nach Konstruktion möglich)

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück.
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde.

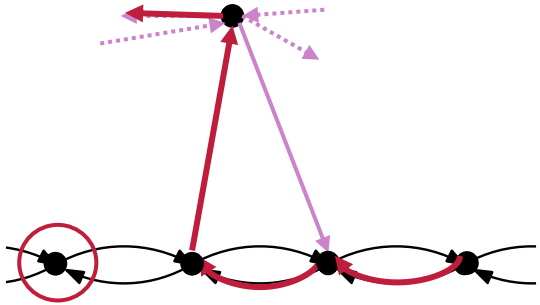
Man muss wieder zurück…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man geht nicht zurück.

Man muss richtig rum laufen…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man läuft Klauseln falsch ab.

Korrektheit

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück. ✓
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde. ✓

Also:

1. Variablen-Gadgets werden in einem Zug durchlaufen
   - Die Richtung gibt uns *true* oder *false*
2. Gibt es keine Belegung der Variablen, sodass φ erfüllt wird, so gibt es immer mindestens ein Klausel-Gadget, dass nicht abgelaufen werden kann.
   - Es gibt also keinen Hamiltonkreis.

Laufzeit der Transformation

Wir erstellen einen Graphen mit

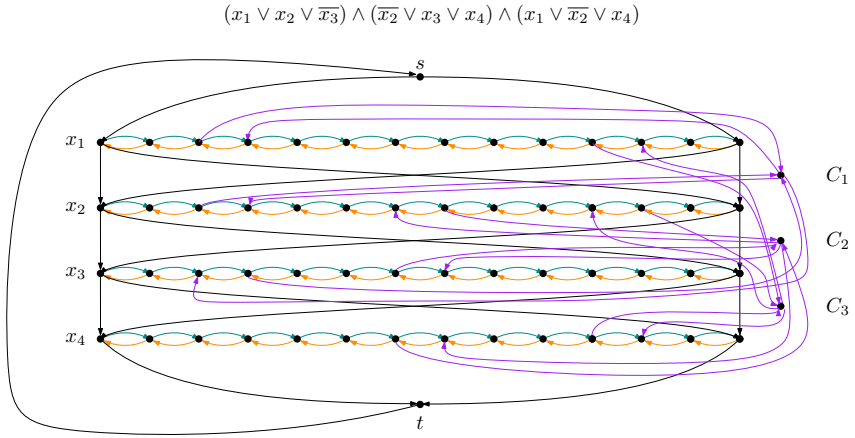
- $4nm + m + 2$ Knoten
- $O(nm)$ vielen Kanten

Wir brauchen also $O(nm)$ Zeit, den Graphen zu erstellen.

Lösung für 3SAT berechnen

- O(1)

Uns interessiert nur, **ob** die Formel erfüllbar ist!



Schritte für einen NP-Schwere Beweis

Zeige: Problem Π ist NP-schwer

- Suche ein geeignetes NP-schweres Problem Π'.
- Reduziere **von** Π' **auf** Π: $\Pi' \leq_p \Pi$
- Beweise Korrektheit:

  „Für jede Instanz $I_{\Pi'}$ von Π' gibt es genau dann eine Lösung, wenn es für die Instanz $T(I_{\Pi'})$ von Π eine Lösung gibt.“
- Beweise polynomielle Laufzeit von T und T^{-1}.

Beliebte Fehler

- Nur für ein Beispiel gezeigt.
- Reduktion falsch herum.
- Im Korrektheitsbeweis nur eine Richtung gezeigt.
- Laufzeit der Transformation nicht berücksichtigt.
- Codierungsgröße von $T(I_{\Pi'})$ ist nicht polynomiell durch die Größe von $I_{\Pi'}$ beschränkt.

Hashing

Hashing

(Symbolbild)

Hashing

“192.168.21.101”

data.zip (3.1GB)

“Was hast du gerade über mich gesagt, du kleiner Studi? Du solltest wissen, ich habe mein Pharmazie Studium in Regelstudienzeit abgeschlossen, war in vielen geheimen Meetings gegen die Studierendenschaft und habe über 300 bestätigte Abbrecher! […]

password.txt

42

Beliebige (Zahlen) Daten beliebiger Länge

Hashfunktion

Zahl (Hash) aus endlicher Menge von Zahlen

890b 23a8	8410 b221	590a 23b8	2401 ba98
b0a1 83f1	09c8 89dd	78bc 08ff	3bcd f783

Hashing: Kontexte

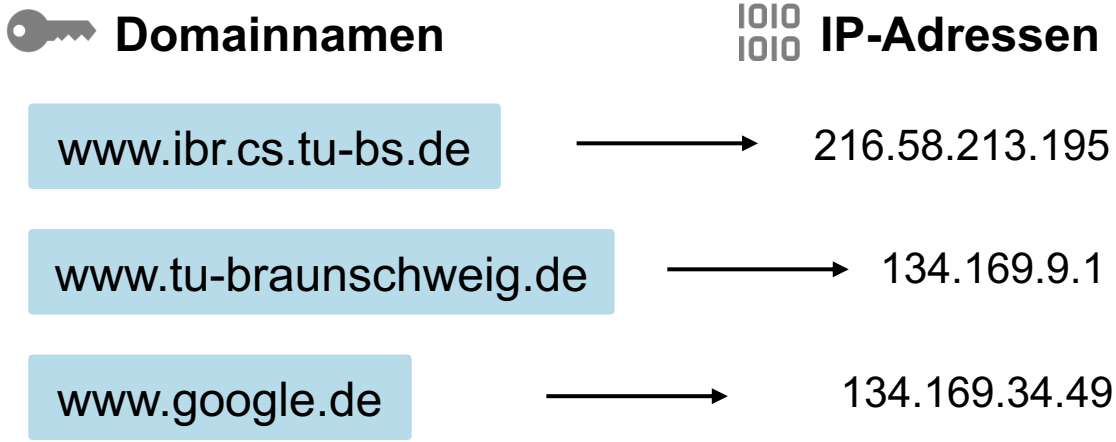
Diese Veranstaltung
- Hash-Tabellen

Weitere Kontexte / Anwendungen
- Checksums
- Kryptografie
- Datenbanken
- Caches
- …

Dictionaries

Assoziative Datenstruktur, speichere Elemente (Value) unter einem Schlüssel (Key).

Beispiel



Keine Reihenfolge garantiert. Hier kann man nicht sortieren, Vorgänger finden etc.

Ein Blick zurück zu AuD 1

Wir könnten Dictionaries mit Datenstrukturen aus AuD1 bauen ...

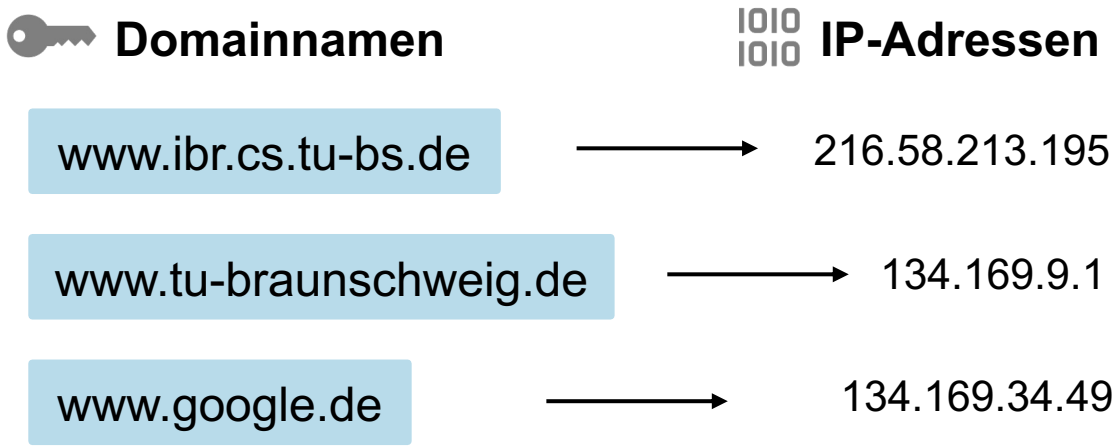
Laufzeiten
Suchen
Einfügen
Löschen

Mit Hashing geht das tatsächlich noch schneller!

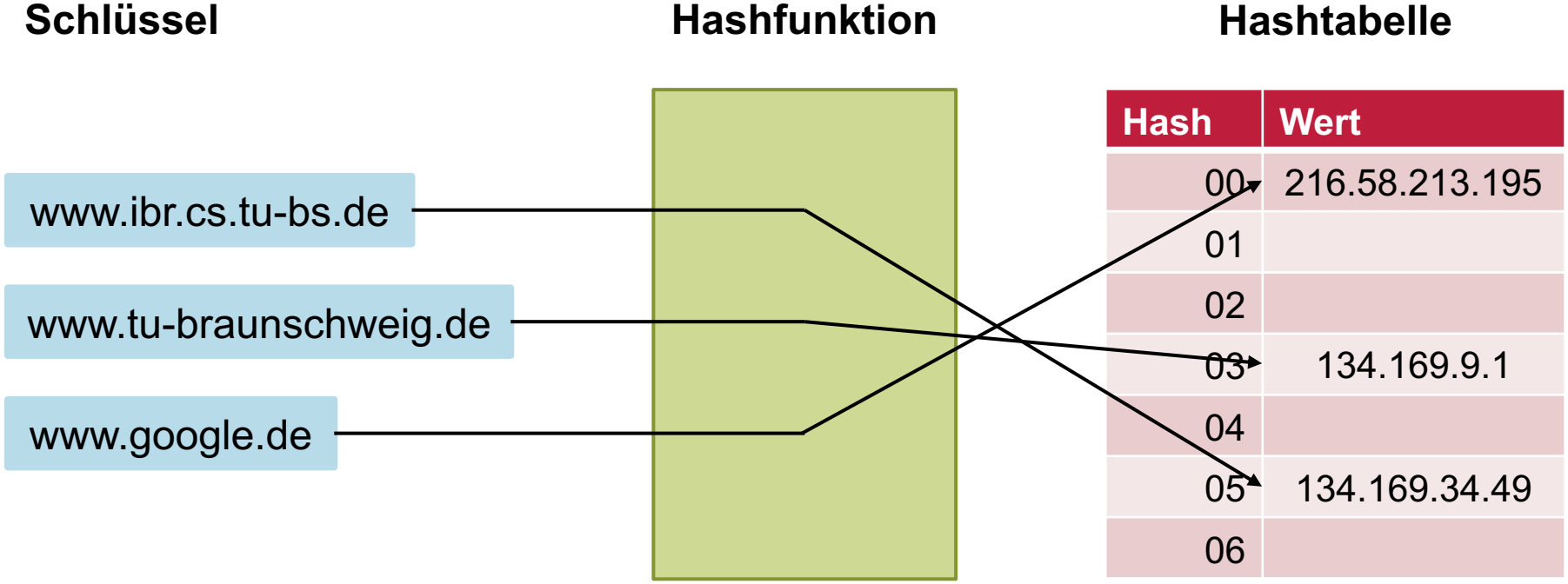
Hash-Tabellen

Assoziative Datenstruktur mit extrem schnellen Operationen für Suchen, Einfügen und Löschen.

Beispiel

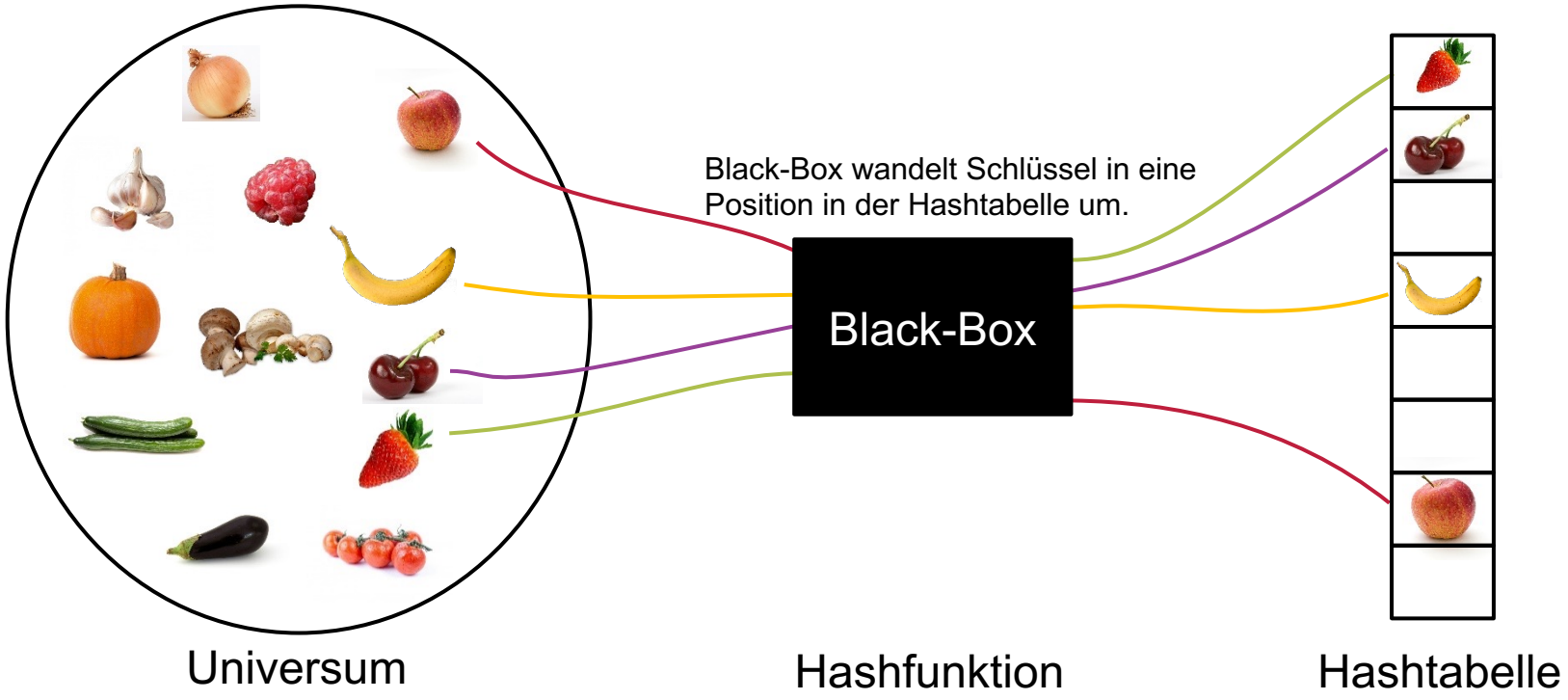


Hash-Tabellen



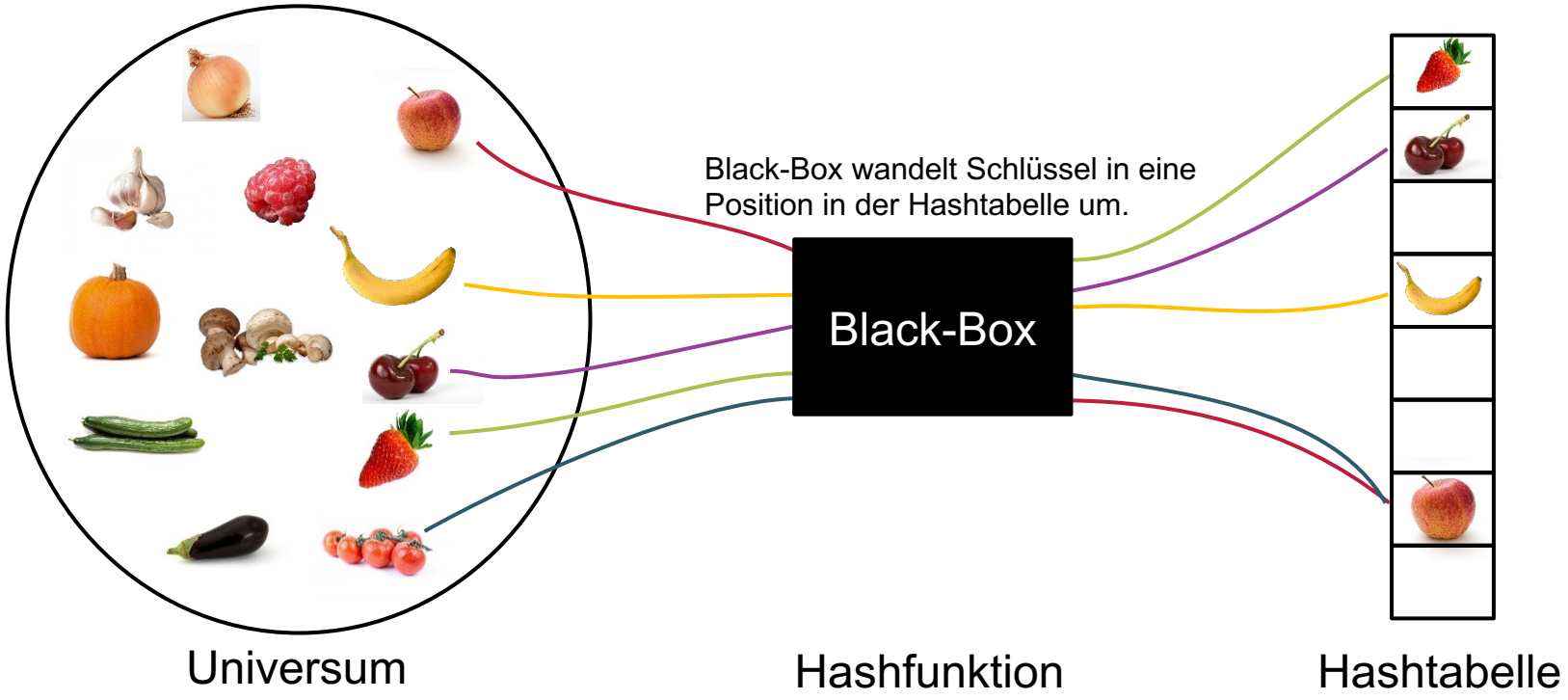
Hashing

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashing

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashing – Kollision

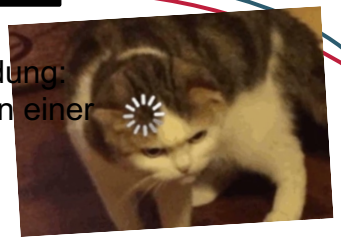
Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel

Universum

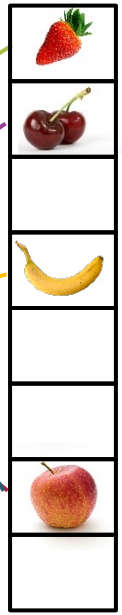
Black-Box wandelt Schlüssel in eine Position in der Hashtabelle um.

Black-Box

Hashfunktion



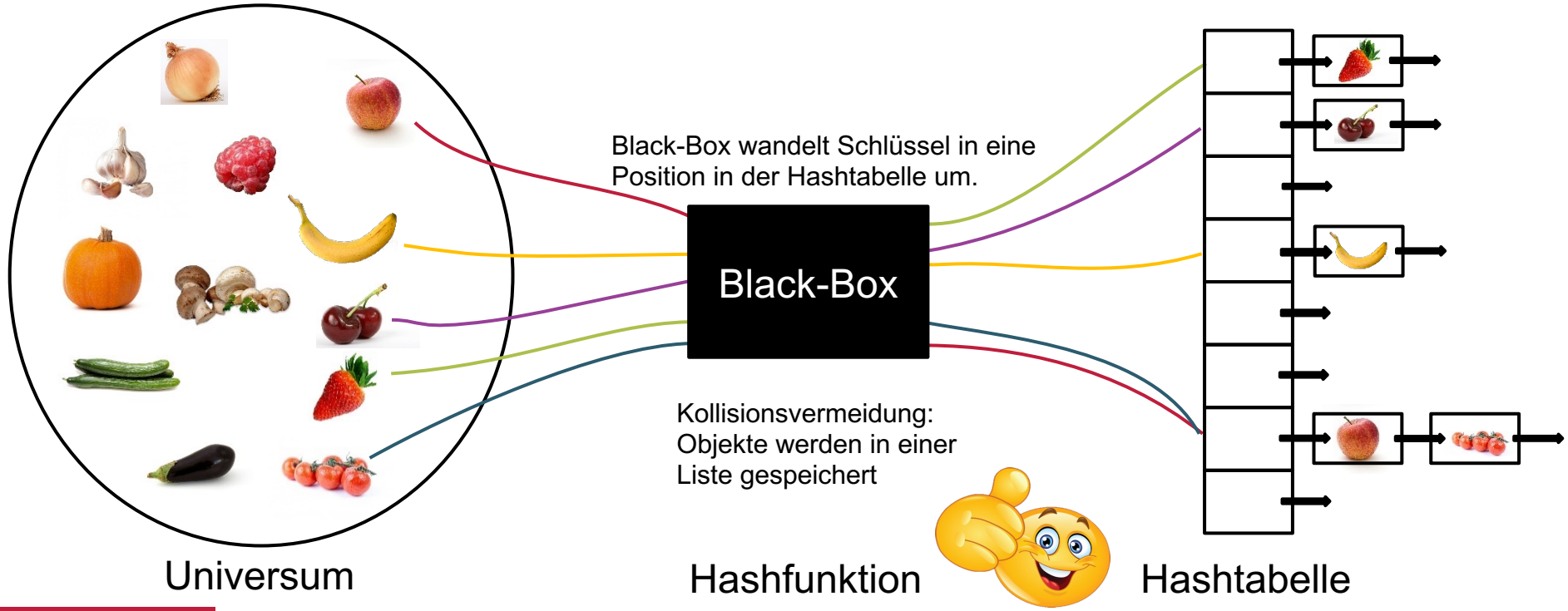
Kollisionsvermeidung:
Objekte werden in einer Liste gespeichert



Hashtabelle

Hashing – Listen

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashing – Listen in der Praxis

Vorteile

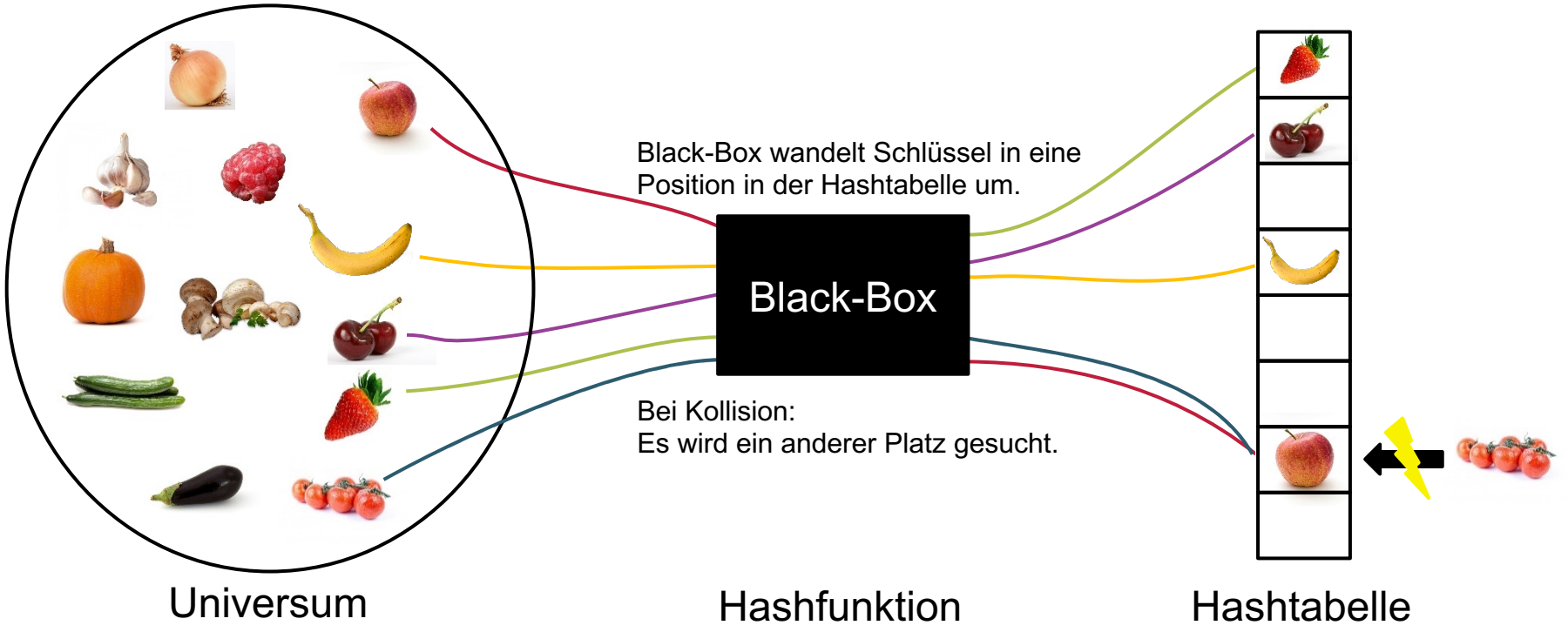
- Einfach zu implementieren
- Robust
- Stabilität der Adressen der Einträge selbst bei Rehashing (z.B. Vergrößerung der Tabelle)

Nachteile

- Zusätzliche Indirektion (siehe Pointer nach, siehe dann Element nach, …): Laufzeitkosten
- Zusätzlicher Platzbedarf
- Zusätzliche dynamische Allokationen (kann man in den Griff kriegen)
- Iteration der Tabelle ohne Extraaufwand langsam:
  - Betrachte jeden Slot (‘Bucket’)
  - Dann jeweils Iteration durch verkettete Liste

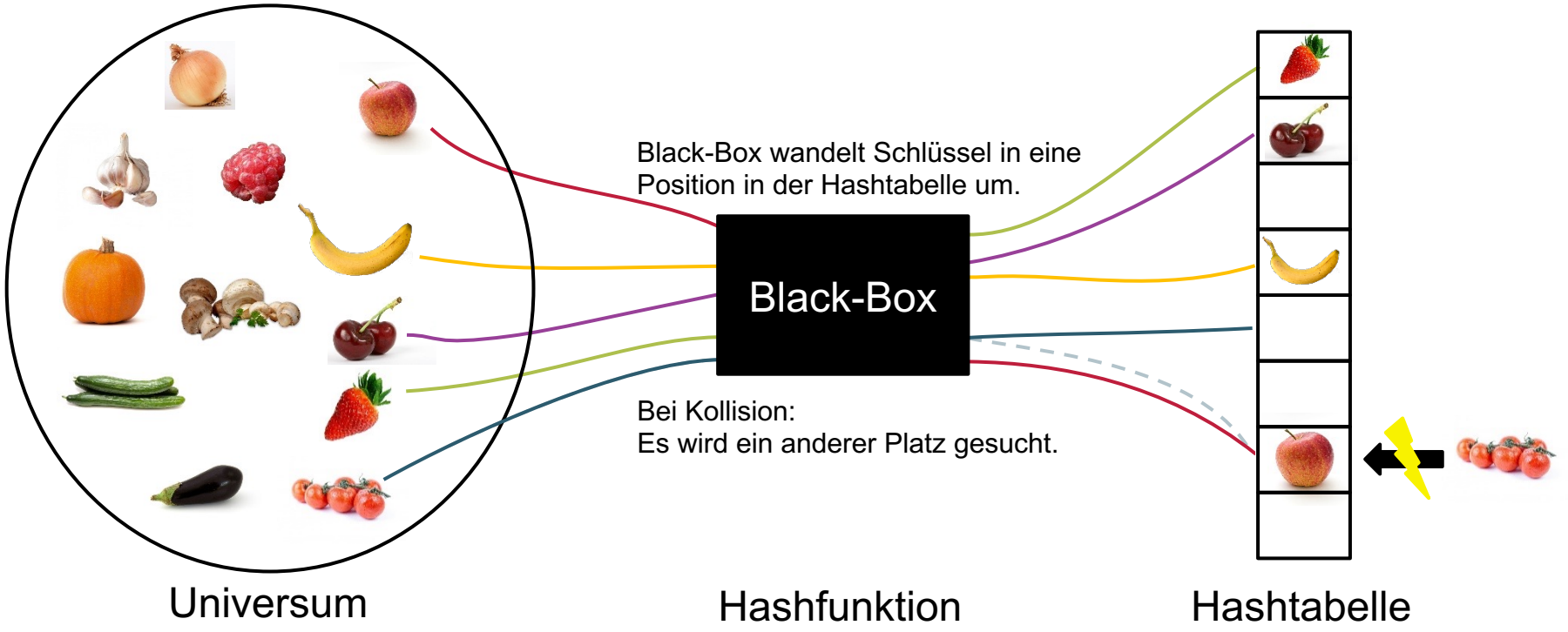
Hashing – offene Adressierung (offenes Hashing)

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



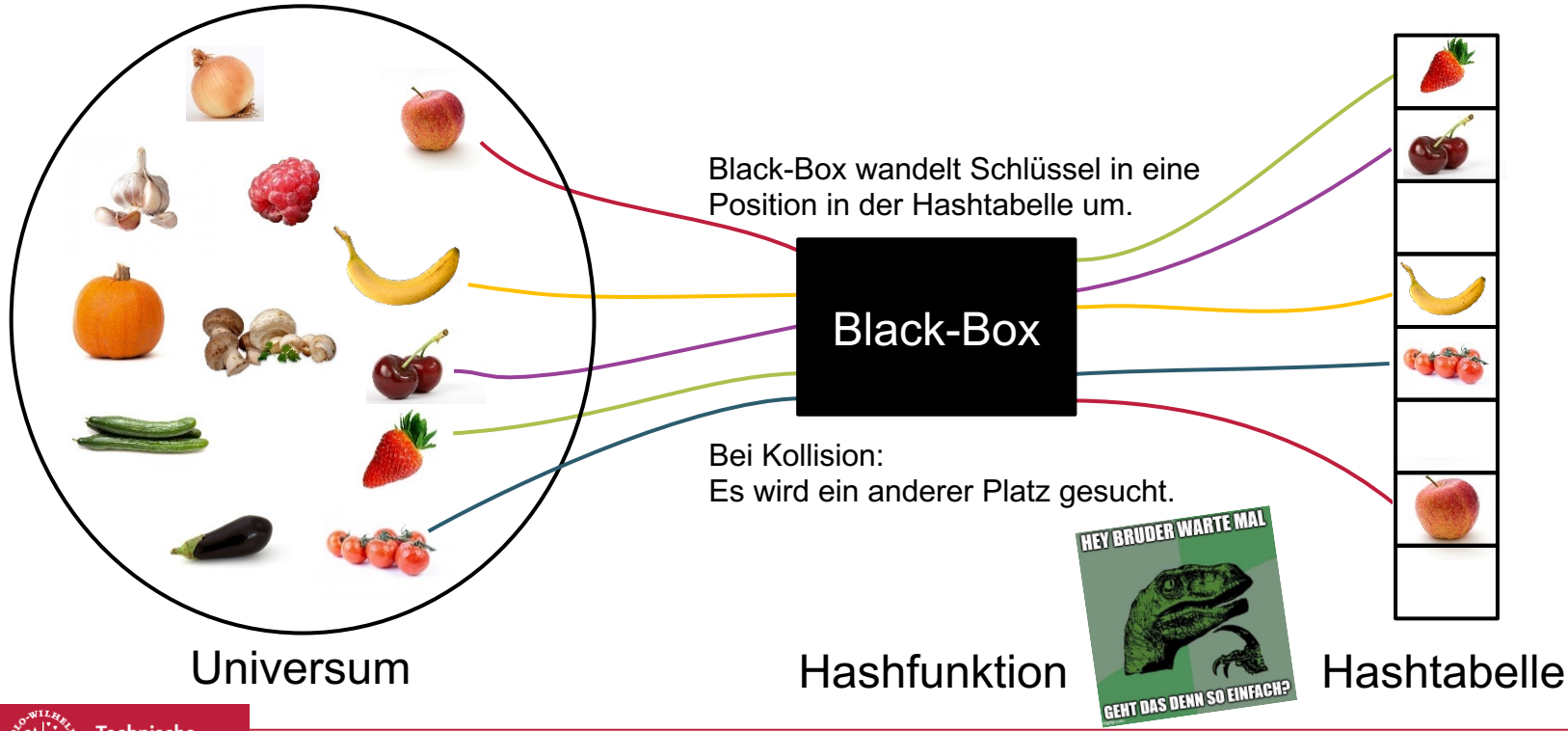
Hashing – offene Adressierung (offenes Hashing)

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



Hashing – offene Adressierung (offenes Hashing)

Jedes Objekt besitzt einen Schlüssel



… aber hat das nicht Konsequenzen?

- Bei offenem Hashing ist nicht mehr eindeutig klar, wo in der Tabelle ein Schlüssel landet
- … das heißt, alle drei Operationen
  - INSERT
  - SEARCH
  - DELETE
- … müssen angepasst werden!

Wir schauen uns hier zunächst INSERT an, den Rest sprechen wir kurz in der nächsten VL an.

Hashfunktionen für offenes Hashing

Hashfunktion nicht mehr nur Mapping Key → Hash, $x \mapsto h(x)$

Sondern: Wir müssen auch bestimmen, wie wir sondieren

Also: Wo schauen wir nach i fehlgeschlagenen Lookups?

Hashfunktion hier also jetzt Mapping (Key, i) → Index, $(x, i) \mapsto t(x, i)$

Wer werden verschiedene Ideen in der Vorlesung sehen:

- Lineare Sondierung
- Quadratische Sondierung
- Multiplikative Sondierung
- Doppeltes Hashing

In Aufgaben: Üblicherweise explizit angegeben

Hashfunktionen – Modulo

Für $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$ ist

$$x \bmod m = r,$$

falls eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass gilt

$$x = q \cdot m + r.$$

Damit ist auch für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$

$$(x + i \cdot m) \bmod m = x \bmod m.$$

Beispiel:

$$27 \bmod 7 = 6$$
$$31 \bmod 9 = 4$$

Man kann zeigen:

$$(a + b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$$
$$(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$$

Klassische Aufgabenstellung

Betrachte ein anfangs leeres Array A der Größe 11, es gibt also die Speicherzellen $A[0], \ldots, A[10]$. In diesem Array führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = 7x + (3x + 1) \cdot i \bmod 11$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben, beginnend bei $i = 0$. Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

26, 152, 4

Klassische Aufgabenstellung

Betrachte ein anfangs leeres Array A der Größe 11, es gibt also die Speicherzellen $A[0], \ldots, A[10]$. In diesem Array führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = 7x + (3x + 1) \cdot i \bmod 11$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben, beginnend bei $i = 0$. Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

26, 152, 4

- Was für ein Sondieren ist das hier?
  - Lineares Sondieren
  - Quadratisches Sondieren
  - Multiplikatives Sondieren
  - ⇨ Doppeltes Hashing
- Welches Problem hat die zweite Hashfunktion $(3x + 1) \cdot i \bmod 11$?
  - Kann 0 sein, dann finden wir keine alternativen Positionen!
  - Hier zu einfach gehalten aus Demonstrationszwecken
  - Passt auf, falls ihr so etwas mal implementiert :)

Klassische Aufgabenstellung

$$t(i,x) = 7x + (3x+1) \cdot i \bmod 11$$

26, 152, 4

x: Schlüssel
i: Versuch (Start bei 0)

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
						26		152		4

INSERT 26:
- $t(0,26) = 6$
- $7 \cdot 26 = 182$
- $182 \bmod 11 = 6$
- keine Kollision

INSERT 152:
- $t(0,152) = 8$
- $7 \cdot 152 = 1064$
- $1064 \bmod 11 = 8$
- keine Kollision

INSERT 4:
- $t(0,4) = 6$
- $4 \cdot 7 = 28$
- $4 \cdot 7 \bmod 11 = 6$
- Kollision!
- $t(1,4) = 8$
- Kollision!
- $t(2,4) = 10$
- Keine Kollision

Seehr ausführlich hier. In den HA reicht eine Zeile pro Hash-Rechnung.

Hashing in der Praxis

Übliche Vorgehensweise

In der Praxis: Objekte implementieren Hashfunktion

- Kennen normalerweise nicht die Größe der Tabelle
- Liefern normalerweise Hashwerte im Bereich eines Hardware-Integers (z.B. $0 \leq h(x) < 2^{64}$)
- Normalerweise findet die Reduktion Modulo m separat statt
- Dieser Teil wird dann normalerweise von der Hashtabelle implementiert
- Gleiches gilt üblicherweise für das Sondieren

Hashing in der Praxis

In Programmiersprachen:

- Java (HashMap)
- C++ (std::unordered_map): üblicherweise mit Listen
- C++ (absl::flat_hash_map): offen, quadratische Sondierung
- Python (dict): offen, spezielle Sondierungsfunktion
- ...

- Was, wenn wir überhaupt nicht wissen, wie viele Elemente in unserer Hash-Tabelle landen werden?
- → Rehashing (mittendrin neue Tabelle erstellen, alle Elemente neu eintragen)

Coding-Interview

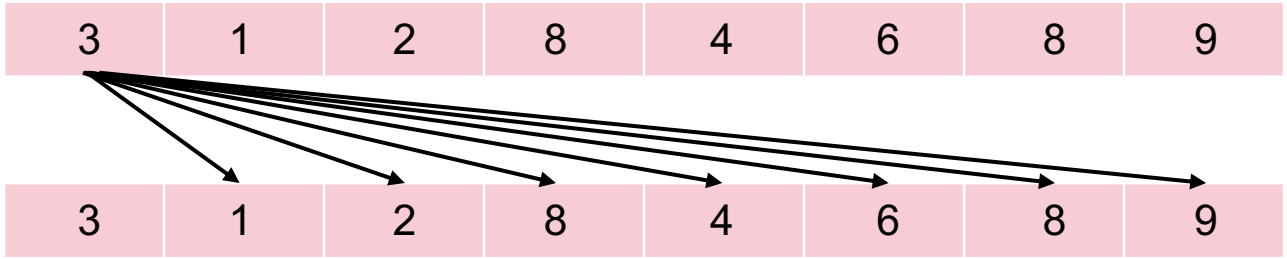
Coding-Interview

Element Uniqueness Problem:

3	1	2	8	4	6	8	9

Frage: Sind alle Zahlen unterschiedlich?

Coding-Interview



Naiver Ansatz:

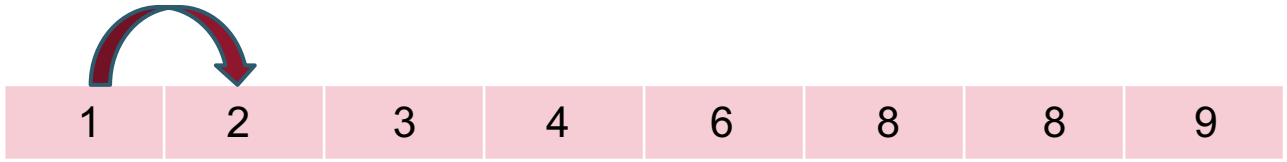
$$
\begin{aligned}
&for\ i\ in\ 1, \dots, n\text{:}\\
&\quad for\ j\ in\ i+1, \dots, n\text{:}\\
&\quad\quad if\ l[i] == l[j]\text{:}\\
&\quad\quad\quad return\ True\\
&return\ False
\end{aligned}
$$

$O(n^2)$

Coding-Interview

3	1	2	8	4	6	8	9

Coding-Interview



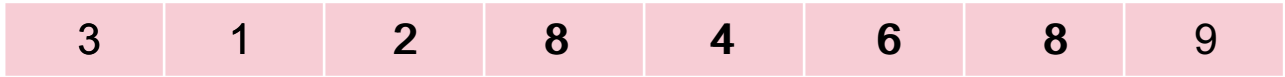
Besserer Ansatz:

Geht Sortieren besser?

Sortieren !

Ja! Hashing :)

Coding-Interview



Noch besserer Ansatz:

```
h = HashMap()
for elem in l:
    if h.contains(elem):
        return True
    h.insert(elem)
return False
```

Average Laufzeit:

$O(n)$

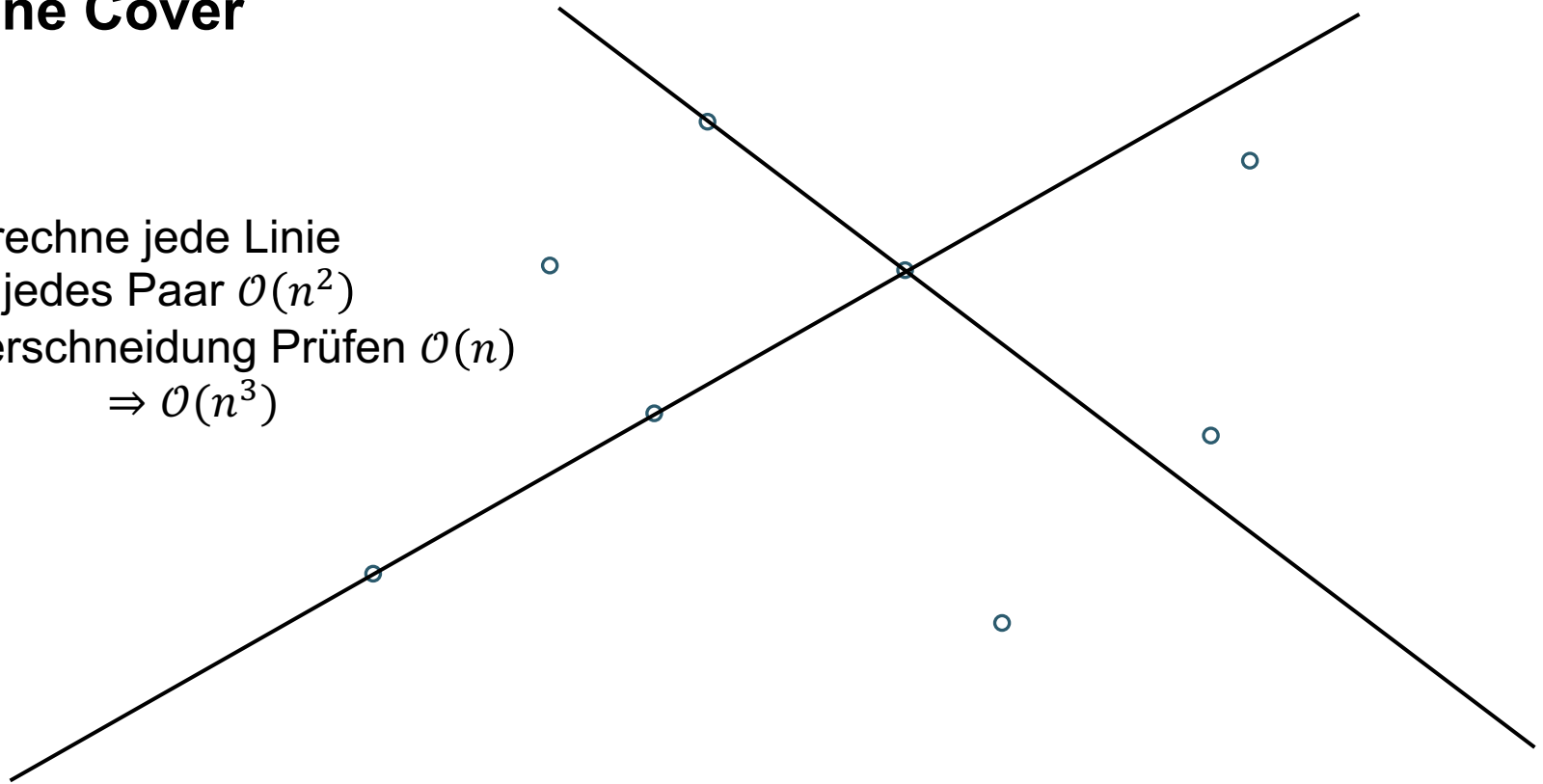
Worstcase Laufzeit:

$O(n^2)$

Point Line Cover

1. Berechne jede Linie
- Für jedes Paar $\mathcal{O}(n^2)$
- Überschneidung Prüfen $\mathcal{O}(n)$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(n^3)$$



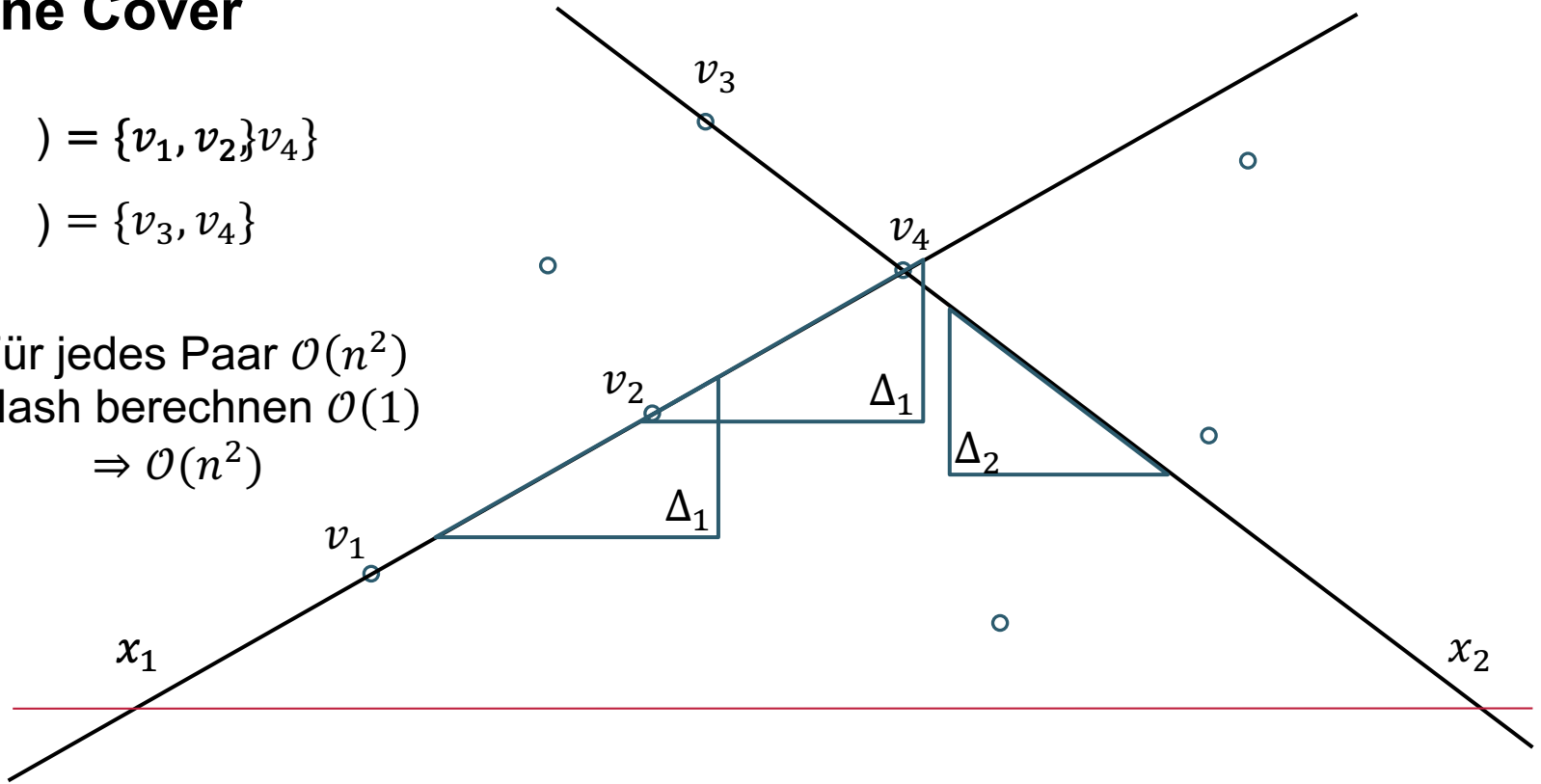
Point Line Cover

$(\quad , \quad) = \{v_1, v_2\}, v_4\}$

$(\quad , \quad) = \{v_3, v_4\}$

- Für jedes Paar $\mathcal{O}(n^2)$
- Hash berechnen $\mathcal{O}(1)$

  $\Rightarrow \mathcal{O}(n^2)$

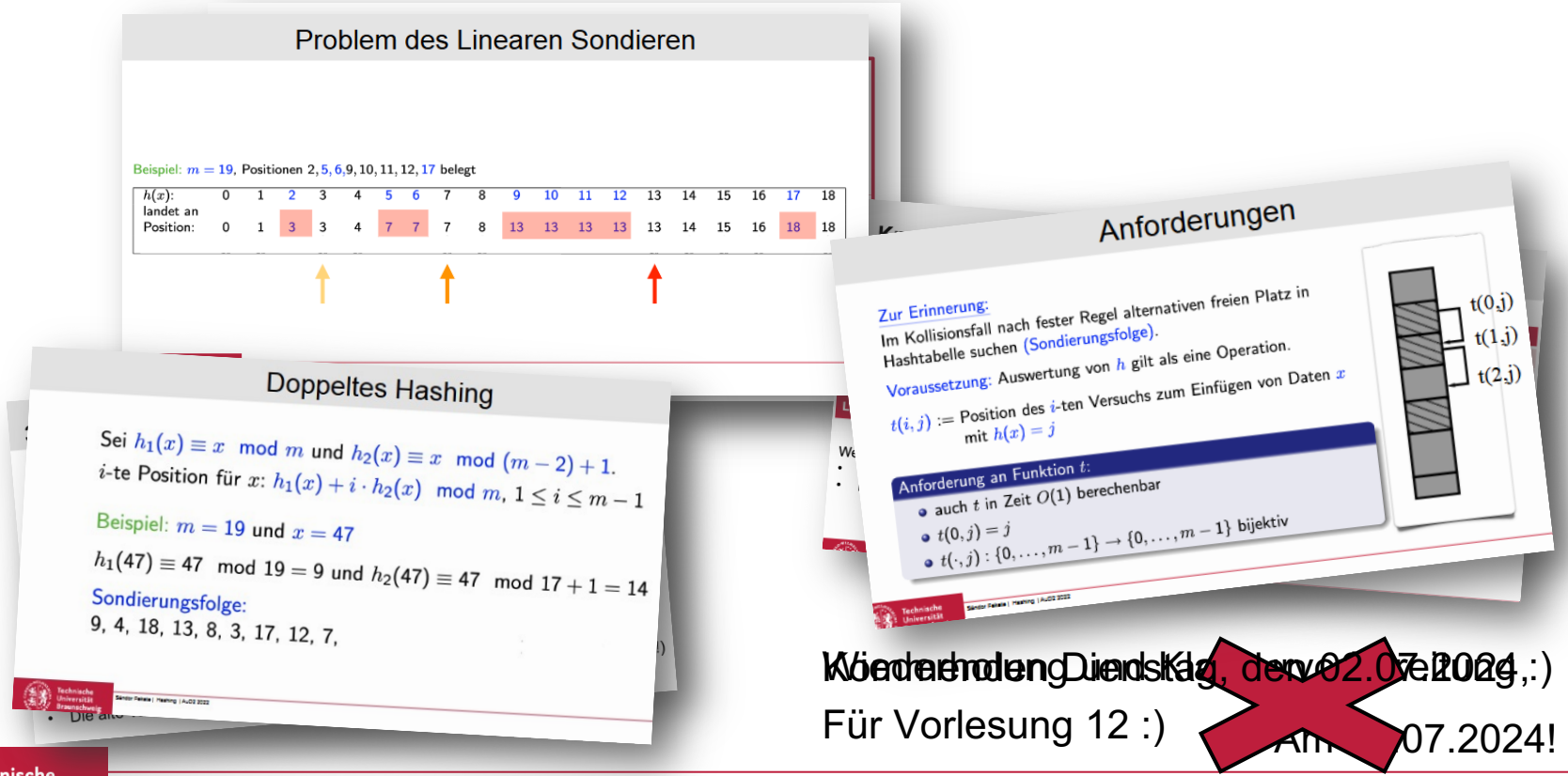


… und nächstes Mal

Wiederholung und Klausurvorbereitung :)

Am 10.07.2024!

… und nächstes Mal



Wiederholung Dienstag, den 02.07.2024 :)

Für Vorlesung 12 :) Am 07.2024!