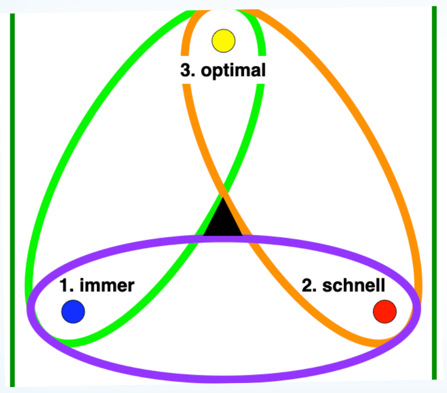
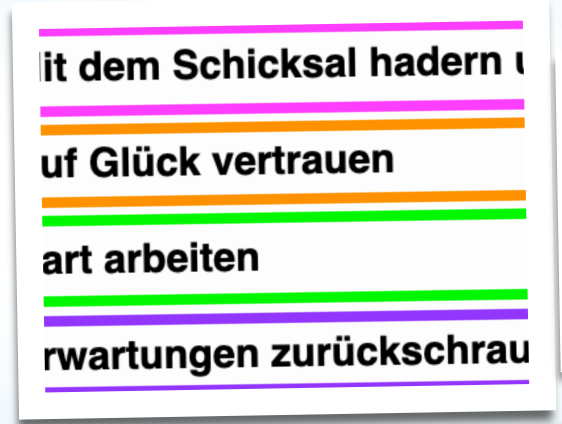
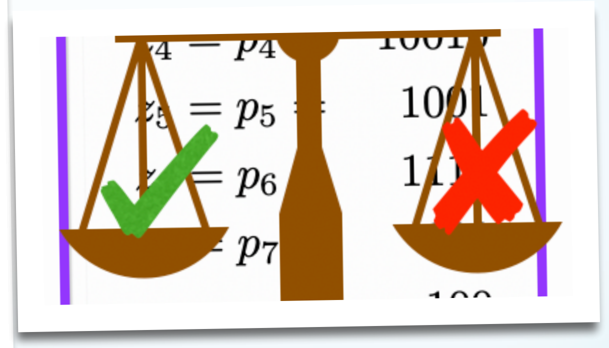






5 Komplexität

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2024

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.1 Die Klasse P: „Perfekte“ Algorithmen

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

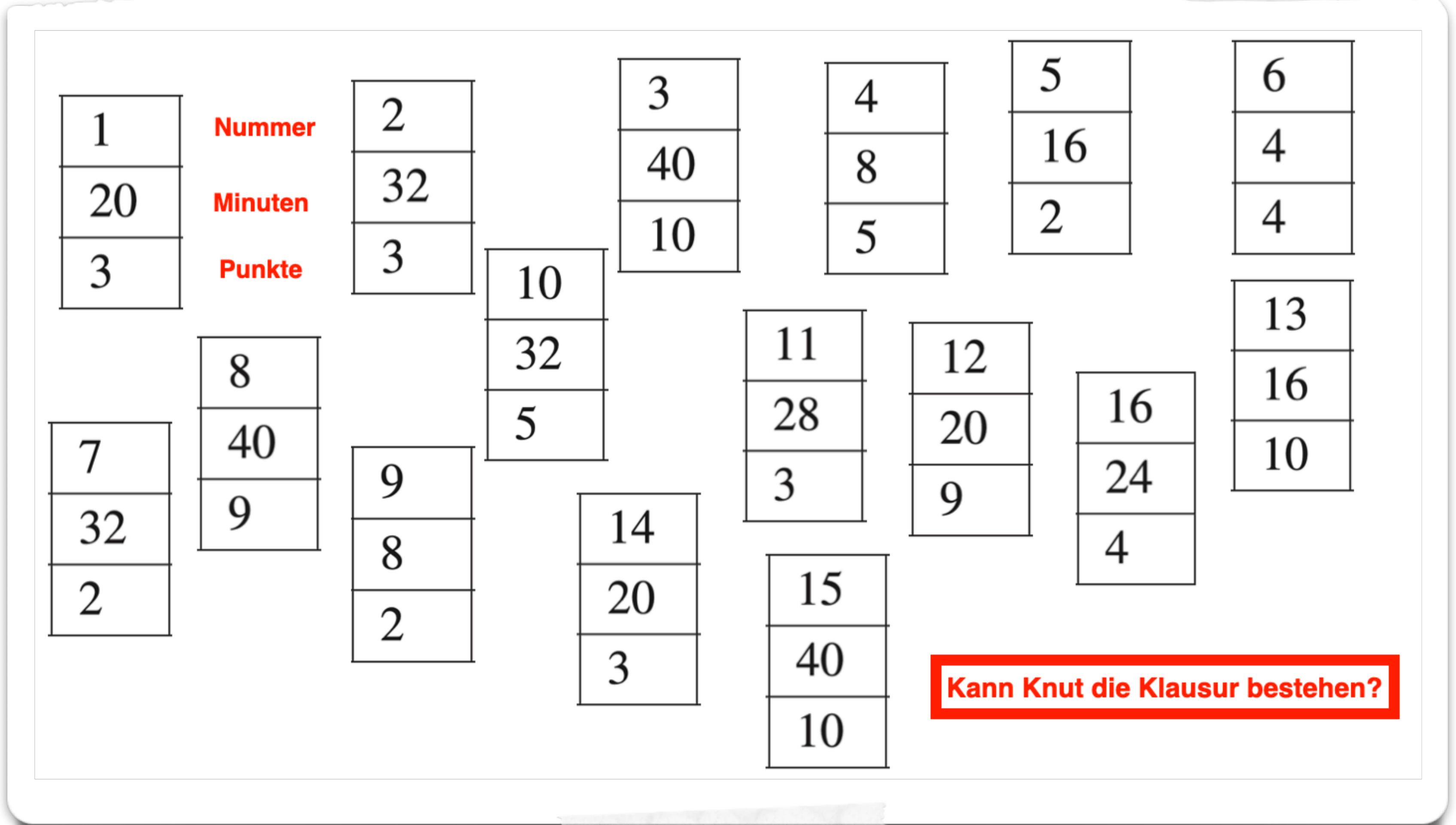
1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. *Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P, wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.*



Achtung:
Das klassifiziert Probleme, nicht Algorithmen!

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

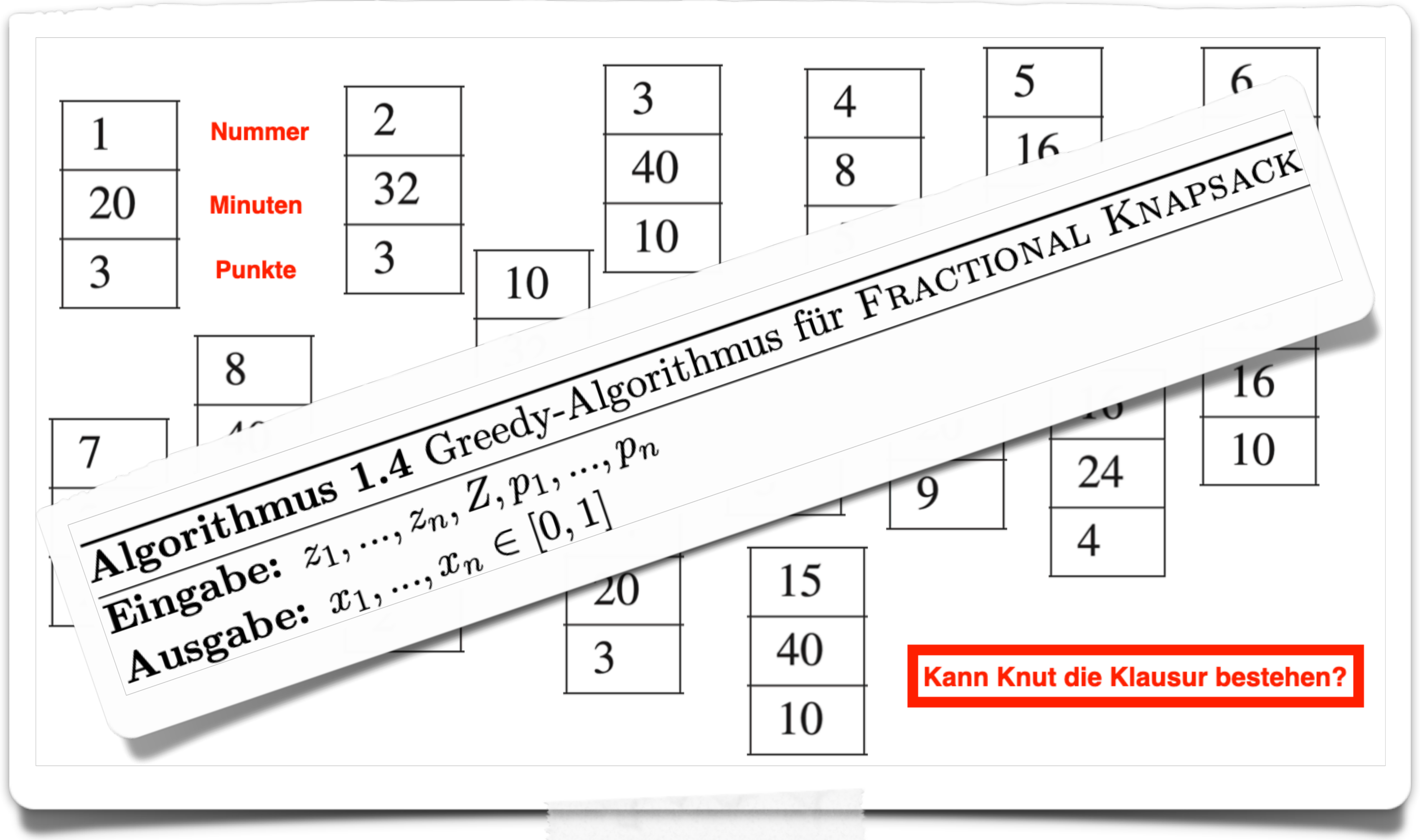
2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. *Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P, wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.*

Fractional Knapsack



Achtung:
Das klassifiziert Probleme,
nicht Algorithmen!

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

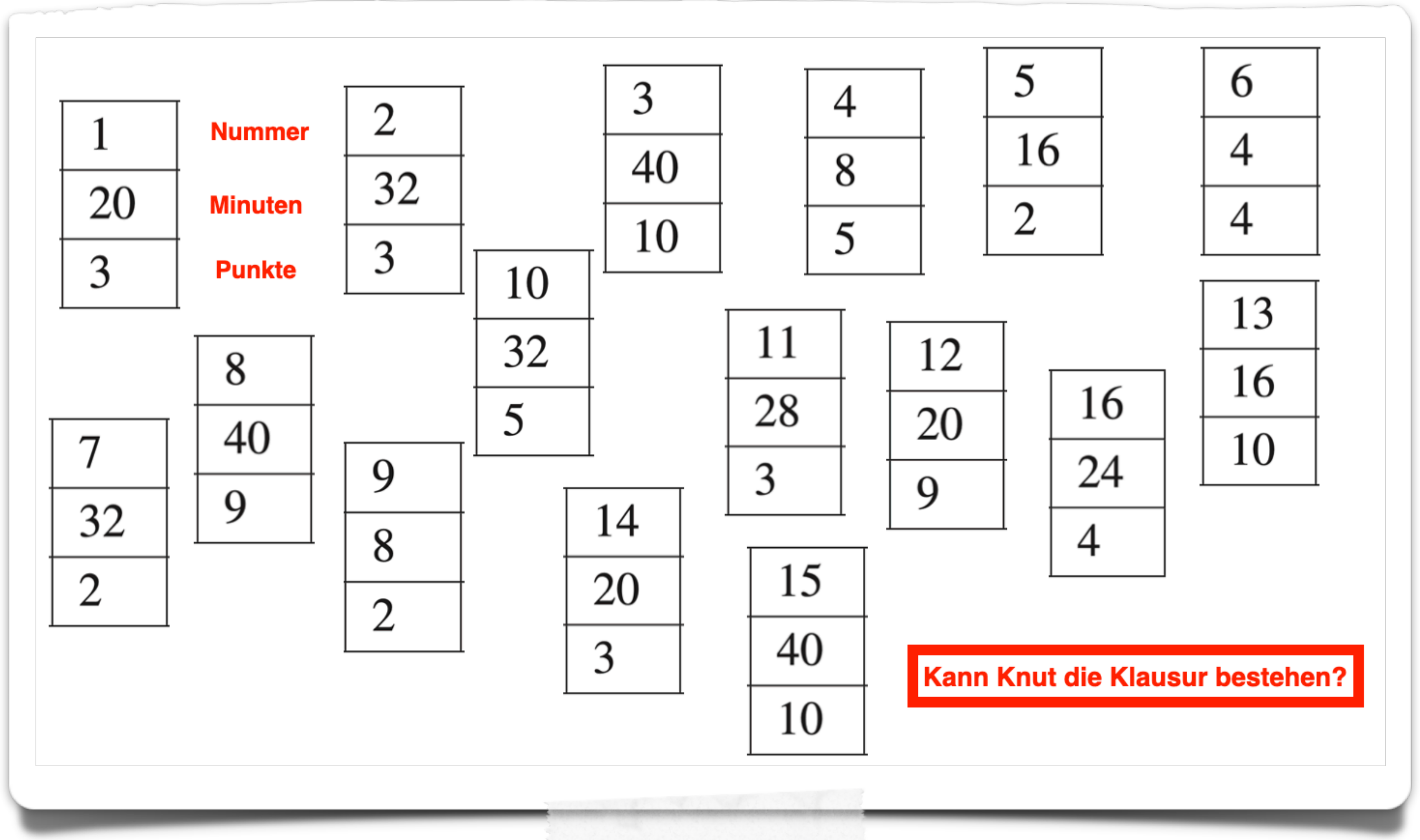
2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

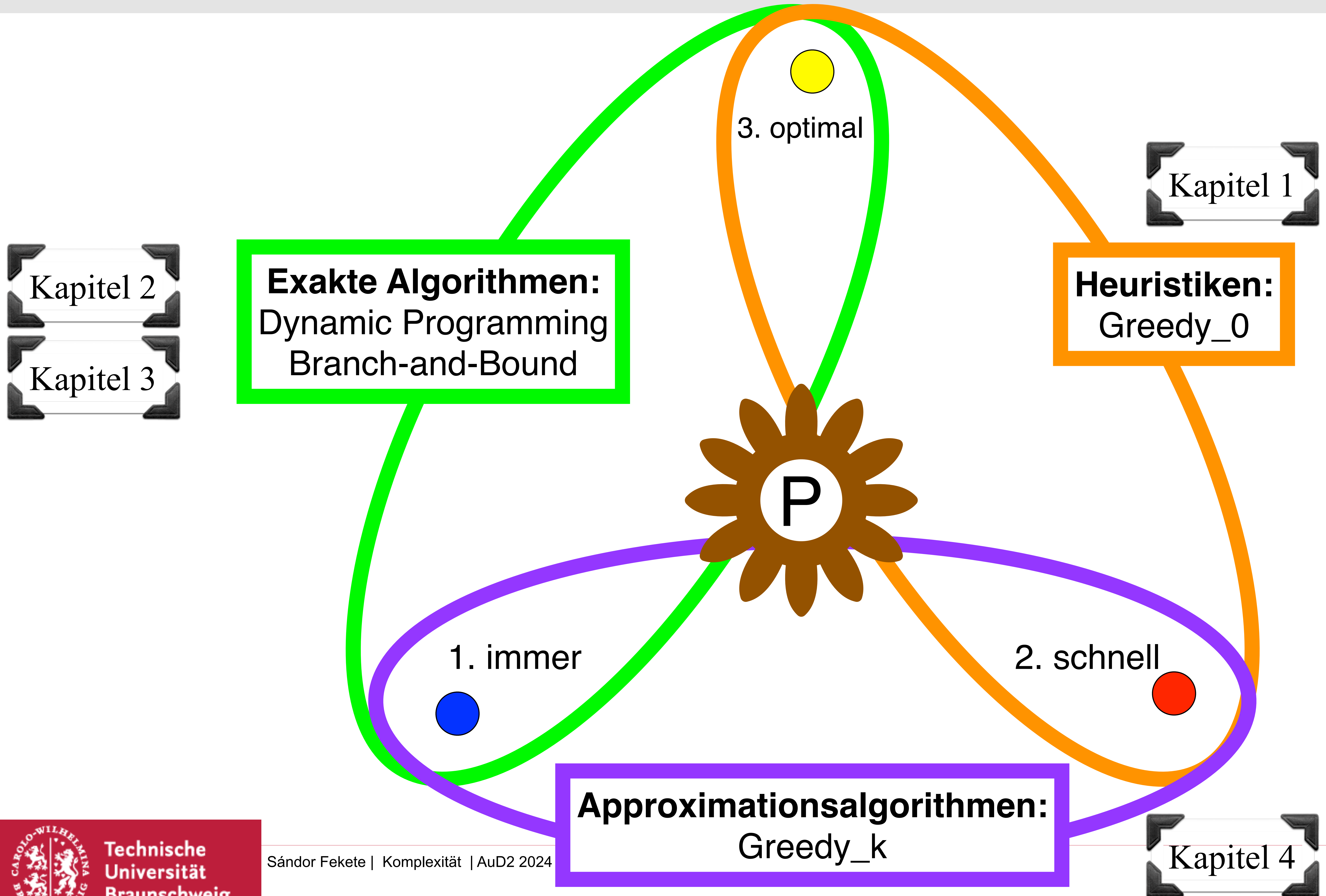
Definition 5.1. *Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P, wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.*

0-1 Knapsack ?!

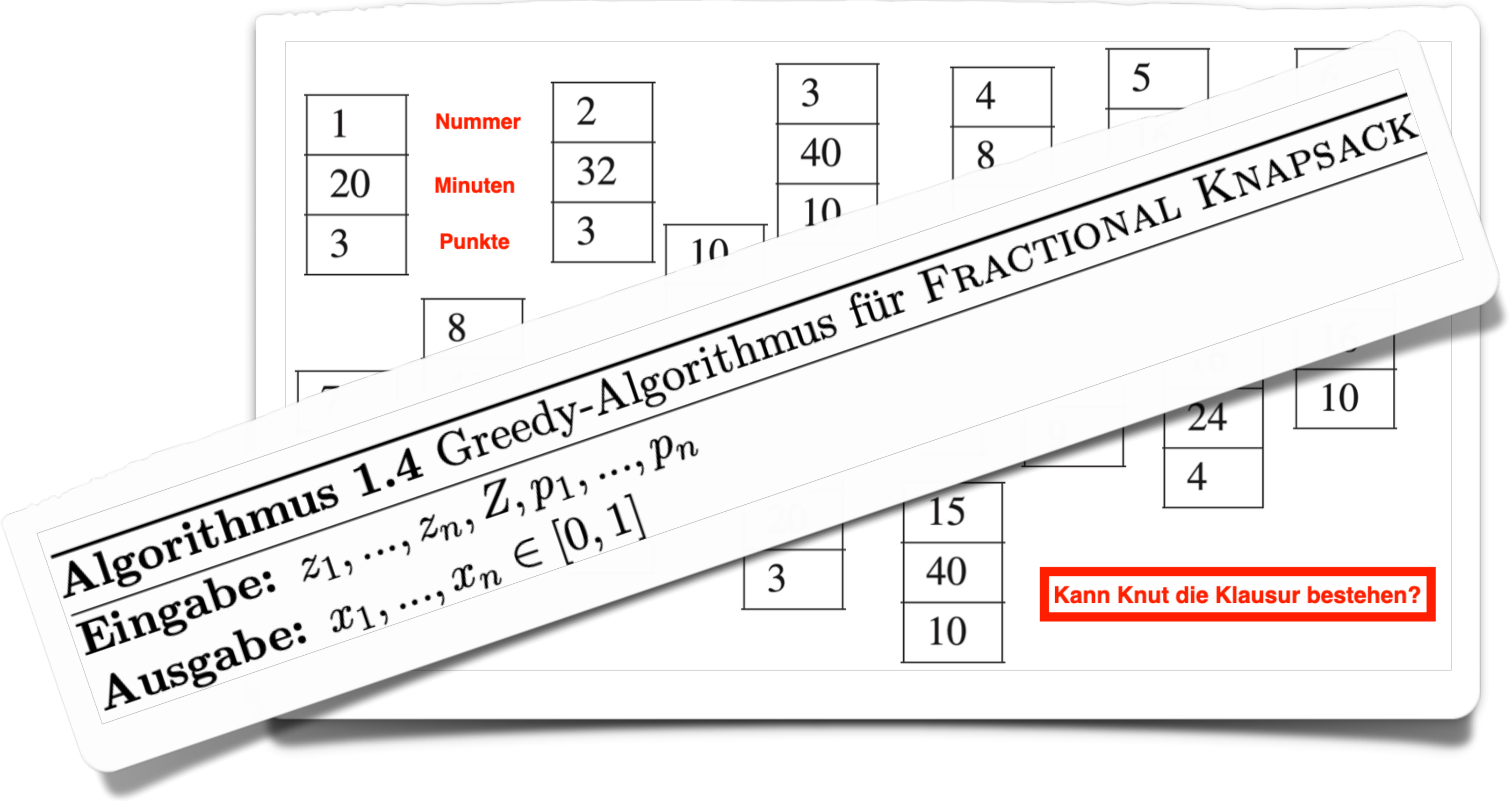


Achtung:
Das klassifiziert Probleme, nicht Algorithmen!

Das Dreieck der Perfektion



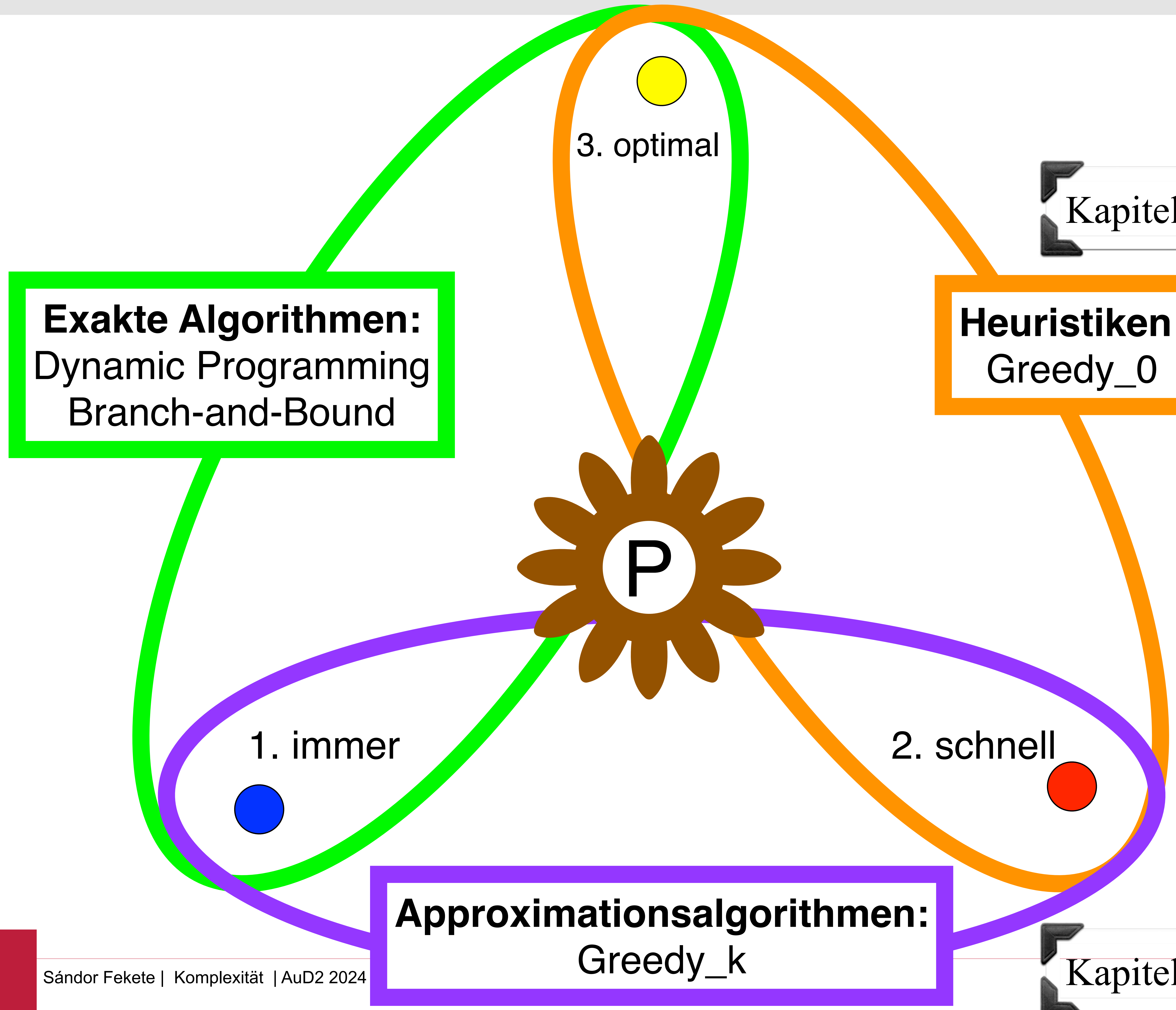
Fractional Knapsack



Das Dreieck der Perfektion

Kapitel 2

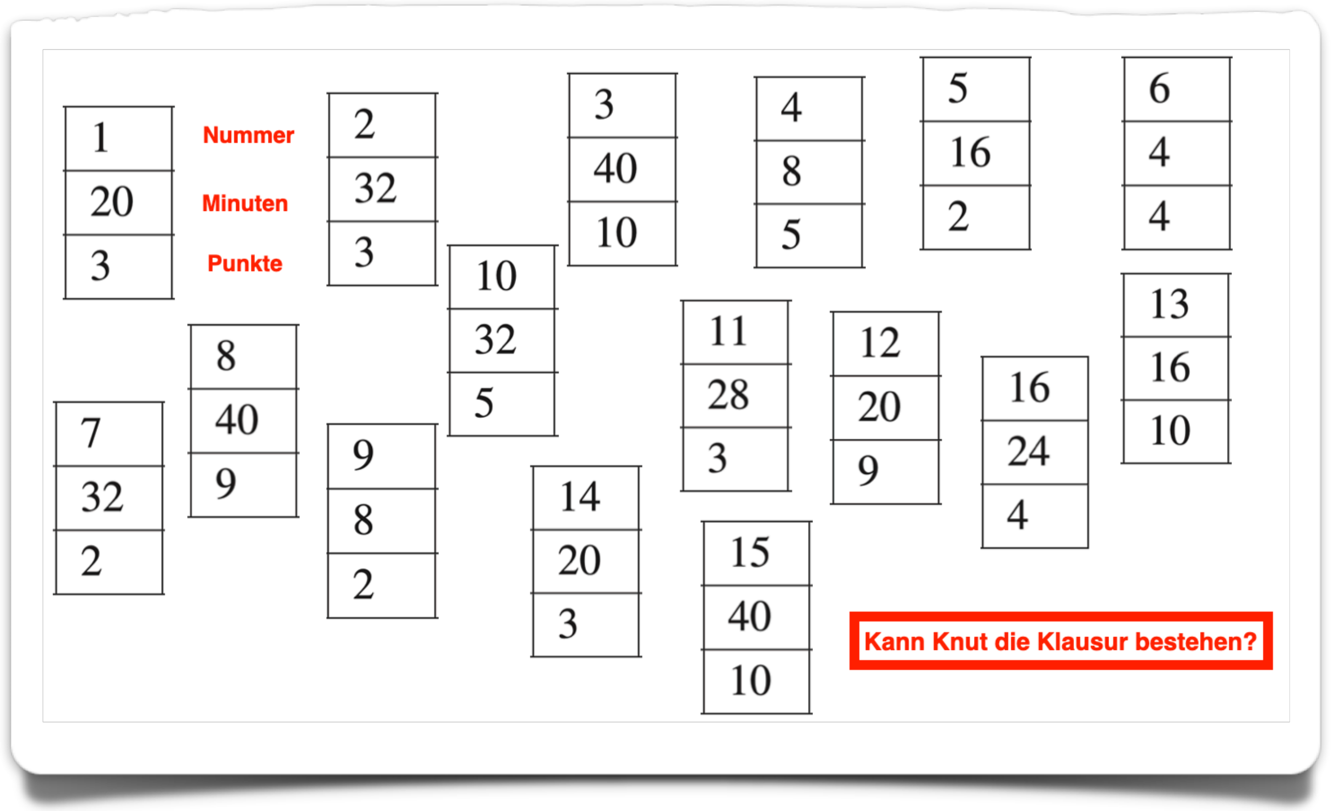
Kapitel 3



Kapitel 1

Kapitel 4

0-1 Knapsack ?!



Gehört 0-1 Knapsack zu P?

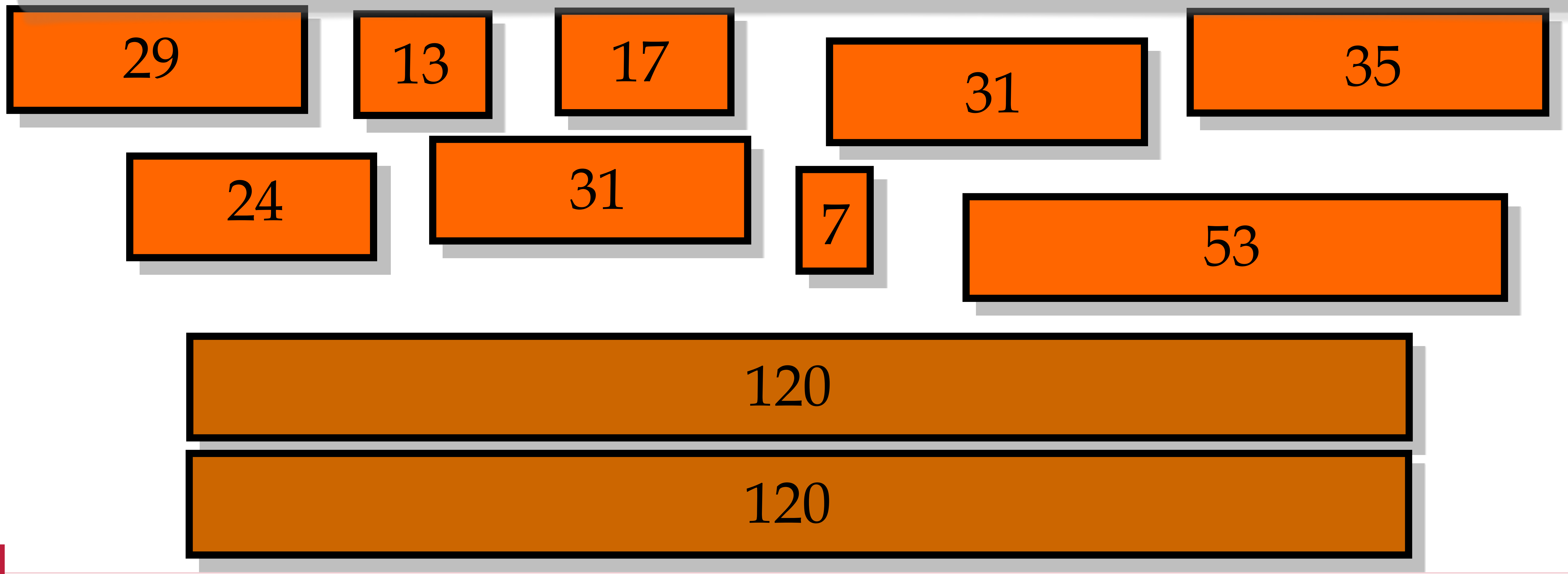
5.2 Die Klasse NP: „NachPrüfen“

Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

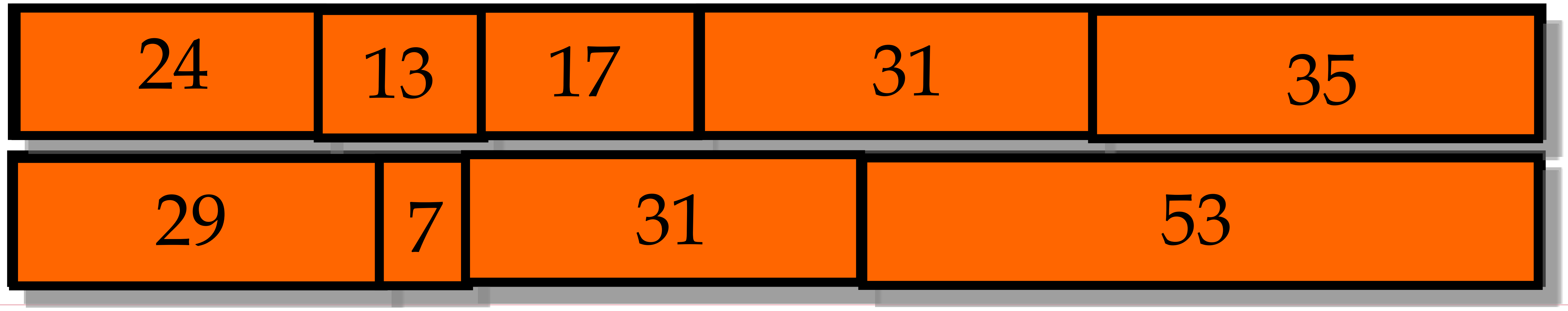
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240



Nachprüfen!

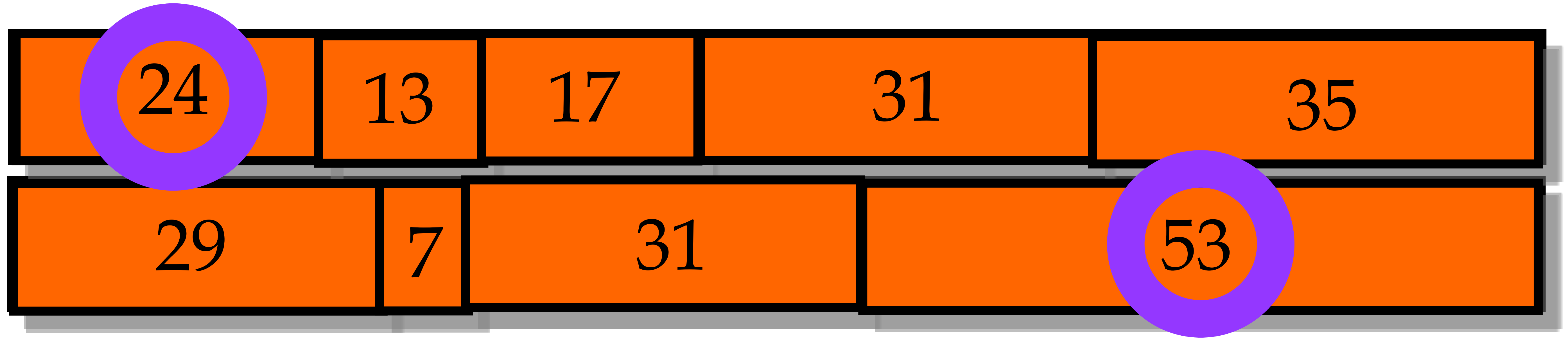
Beispiel 1.10.
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$
Gesamtsumme: 240



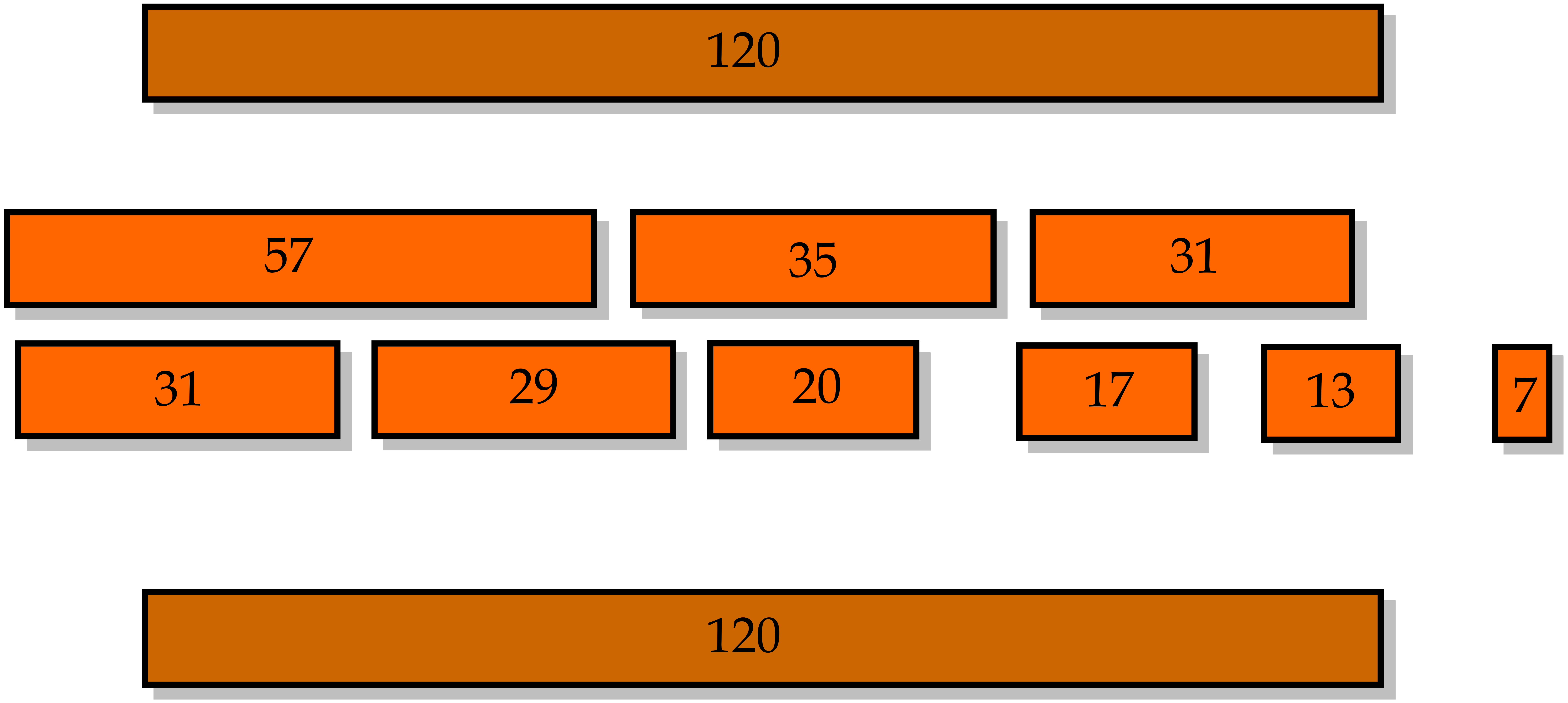
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$
Gesamtsumme: 240

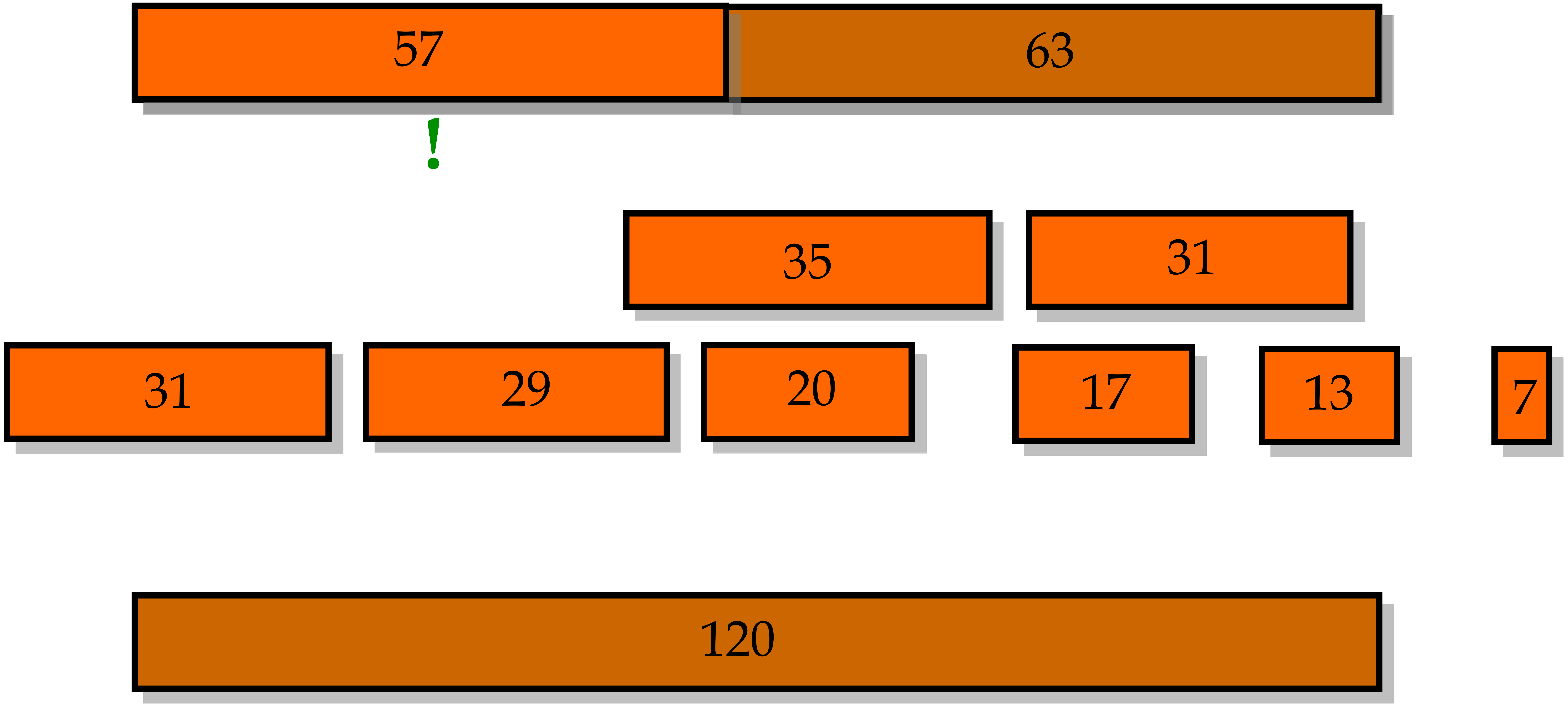
Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



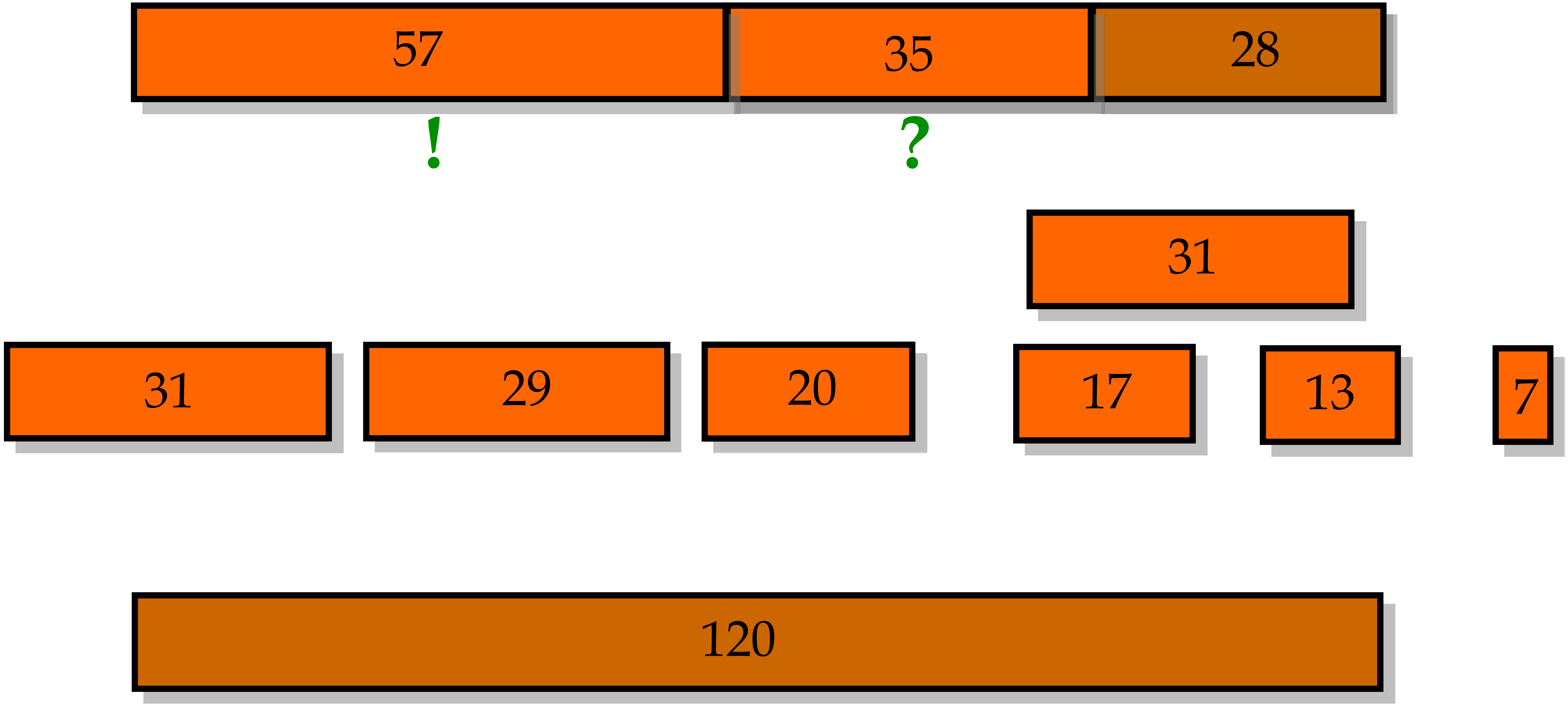
Keine Lösung?!



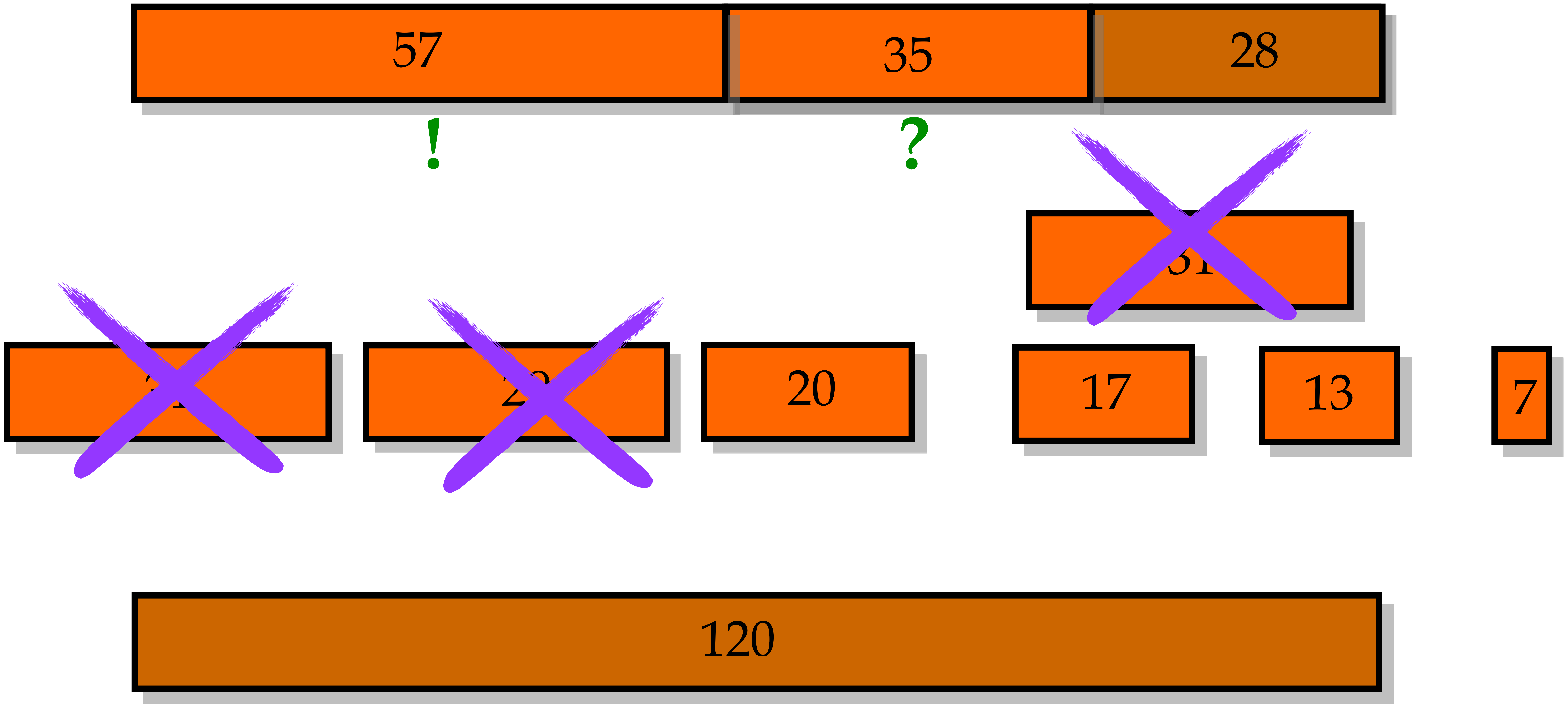
Keine Lösung?!



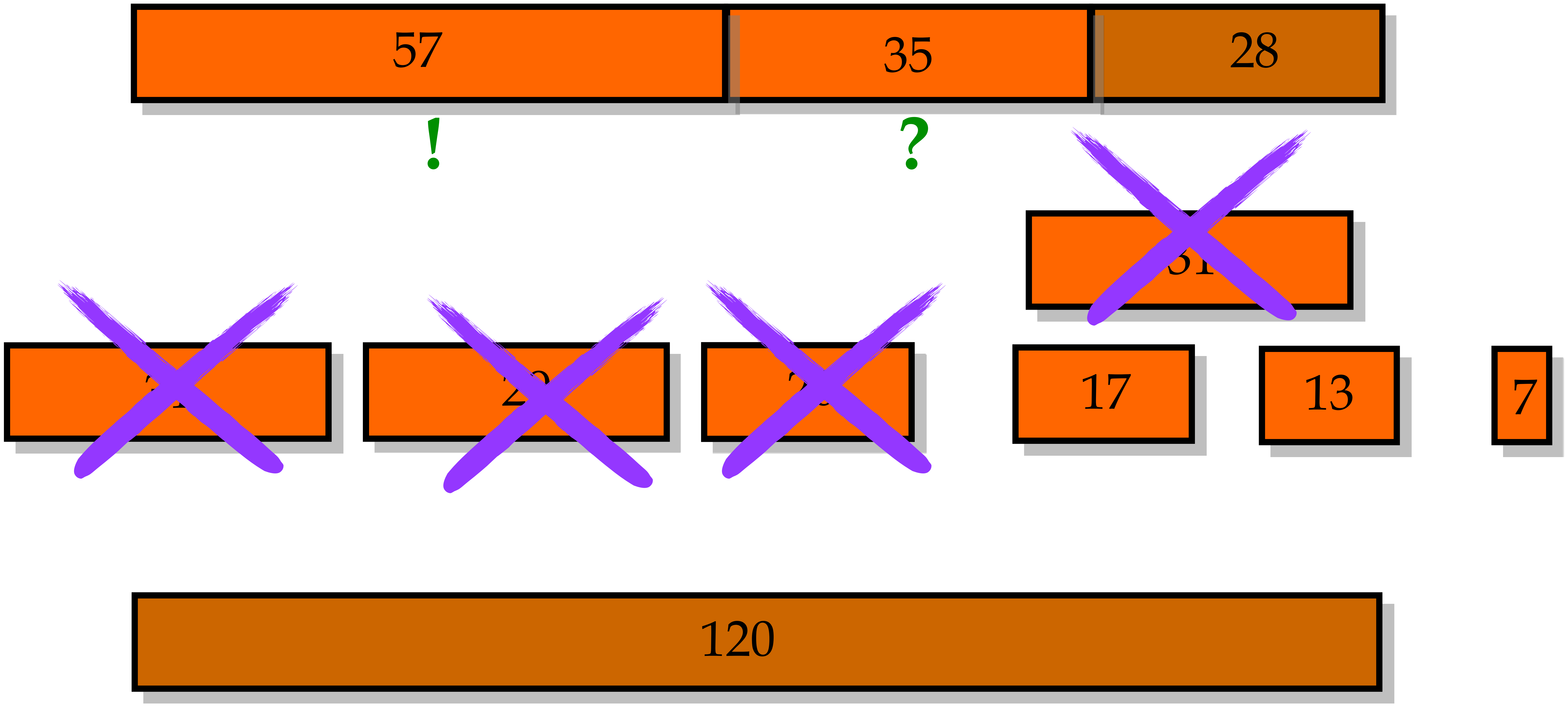
Keine Lösung?!



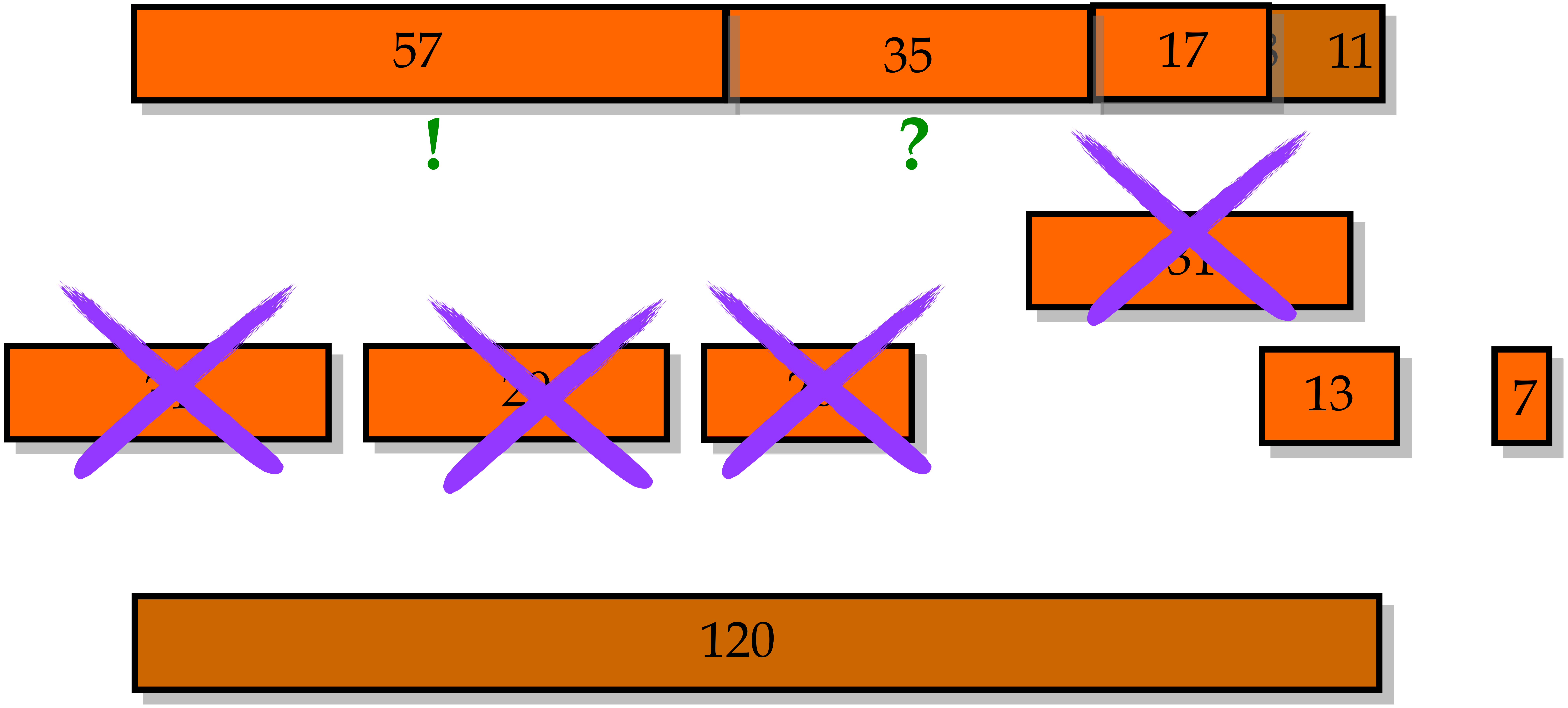
Keine Lösung?!



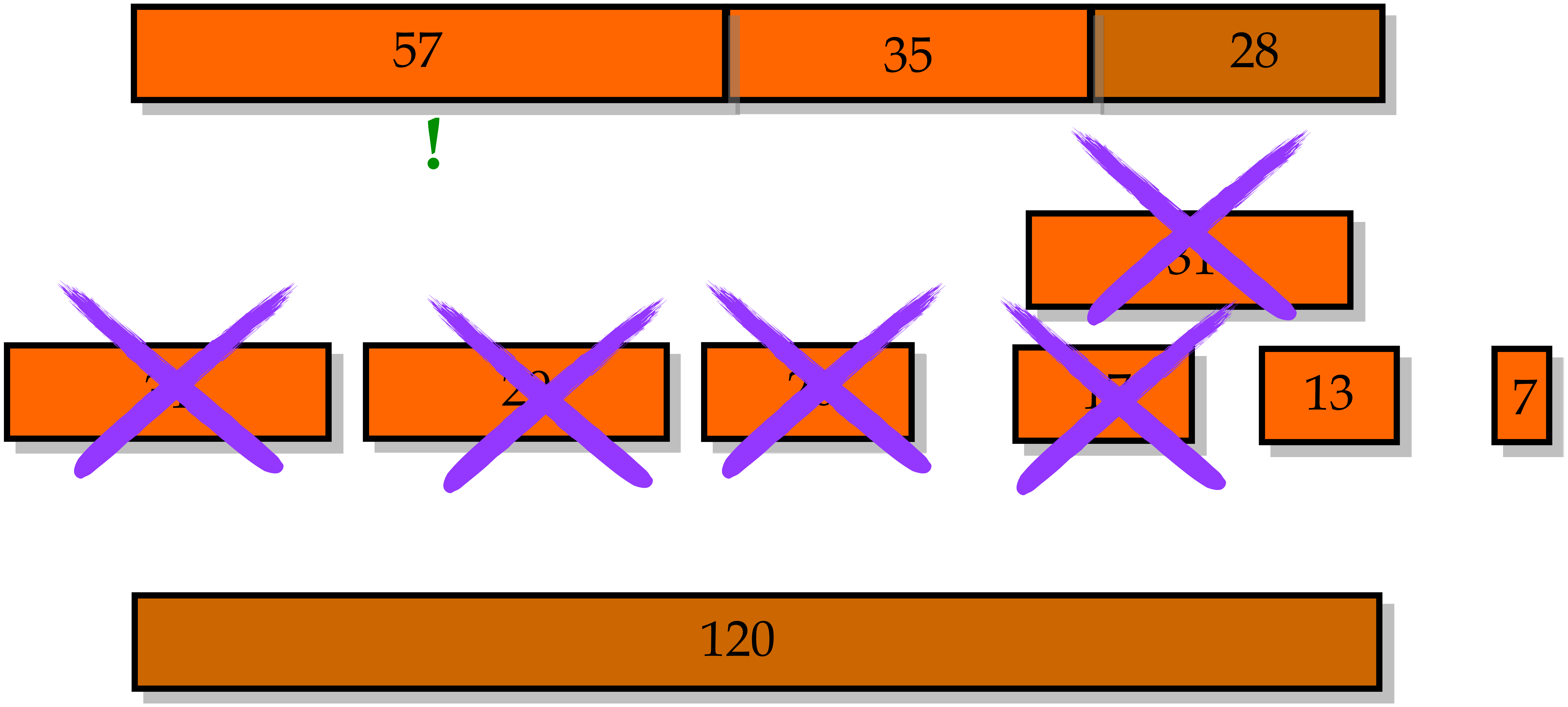
Keine Lösung?!



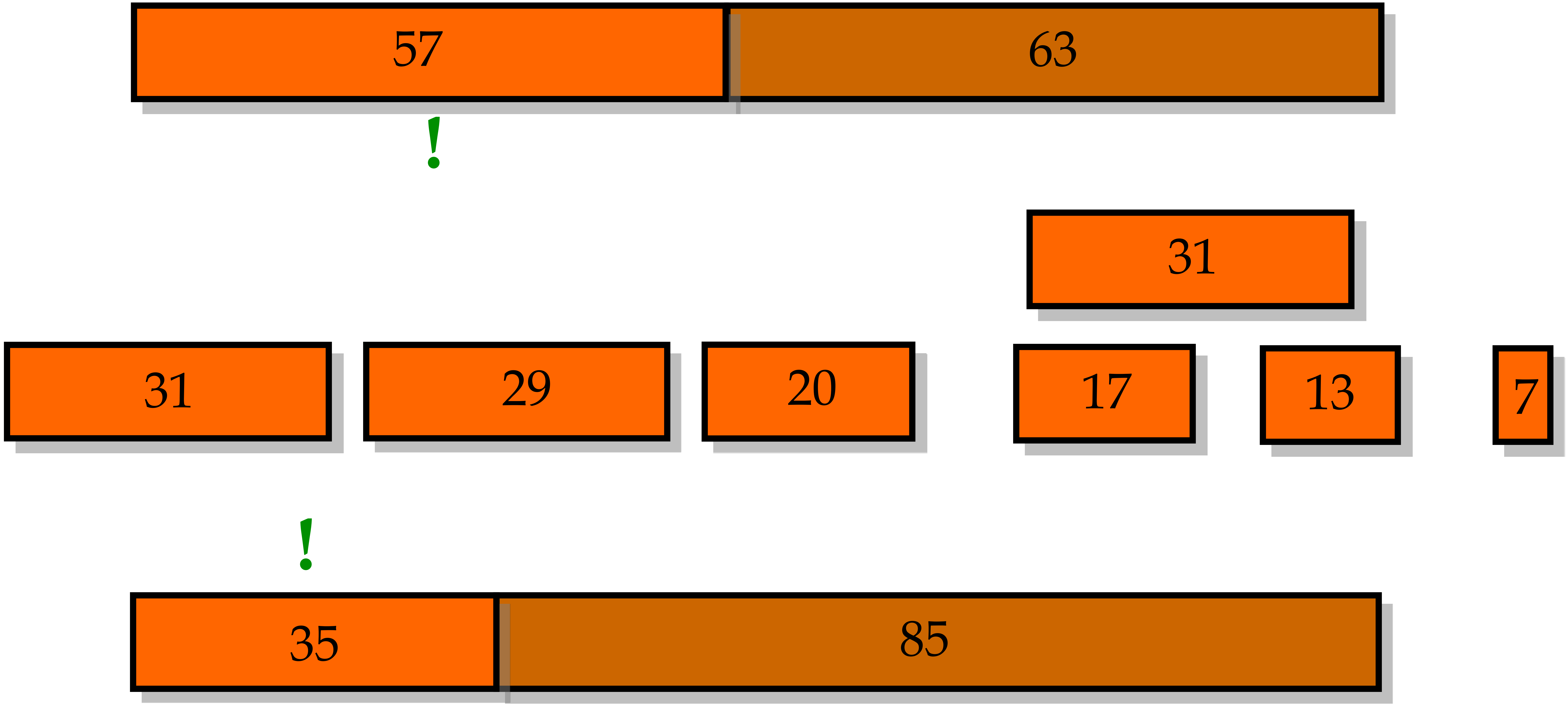
Keine Lösung?!



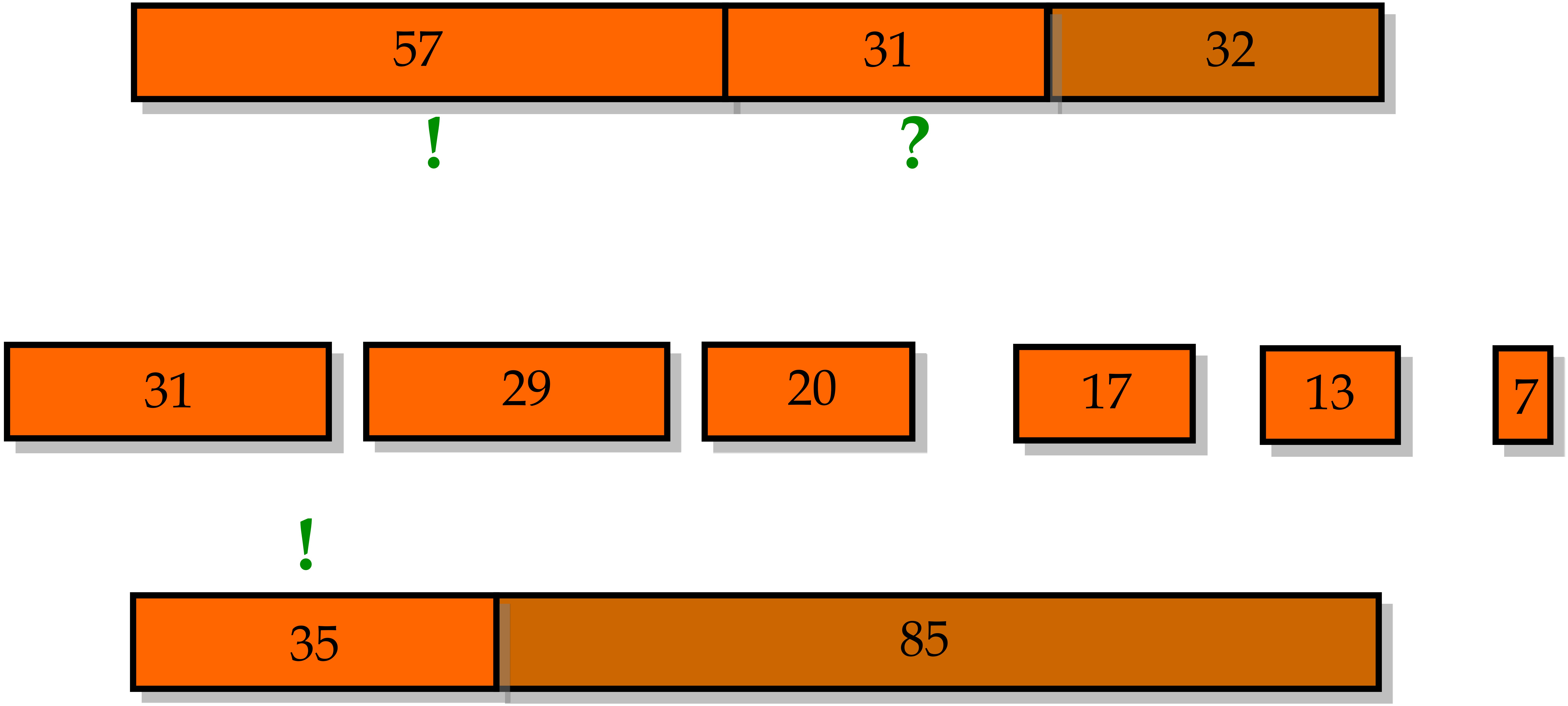
Keine Lösung?!



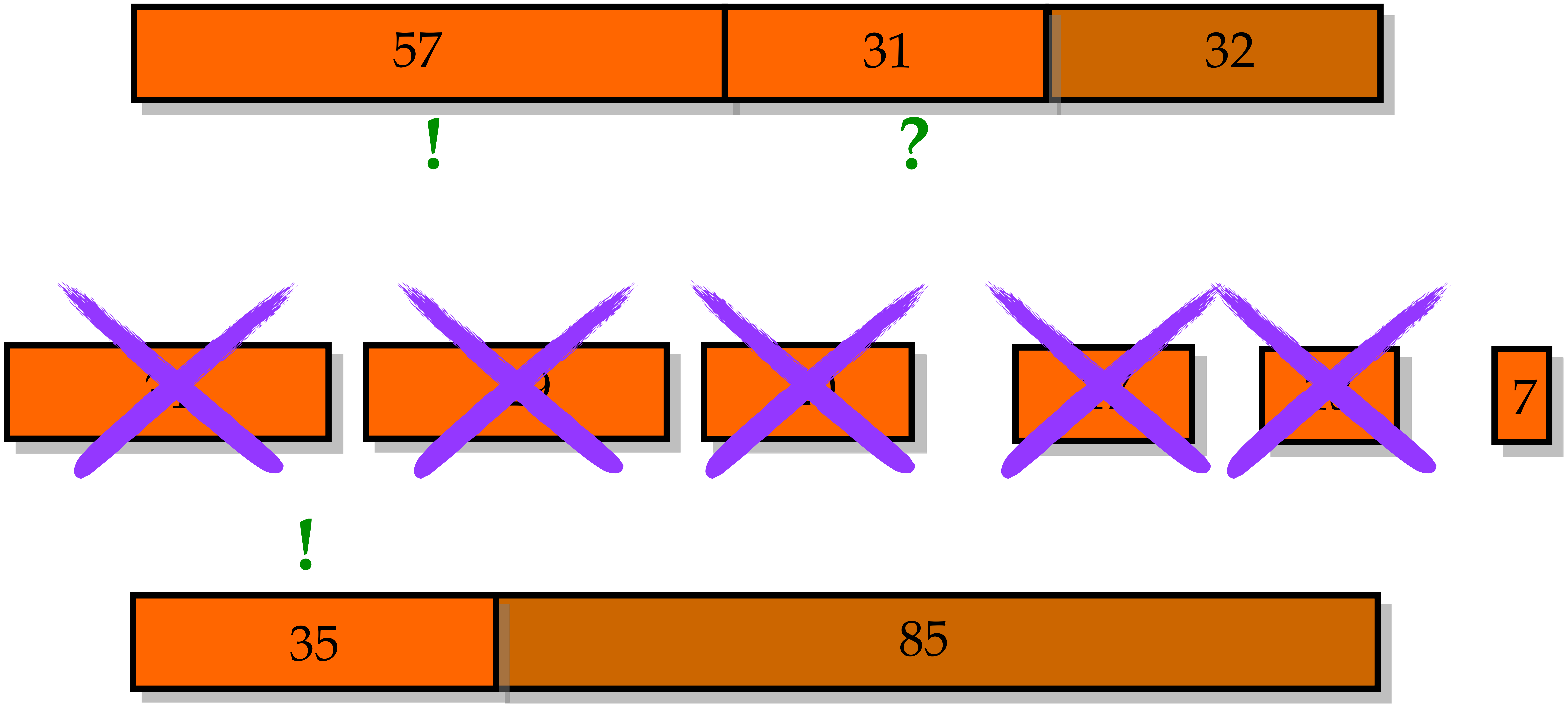
Keine Lösung?!



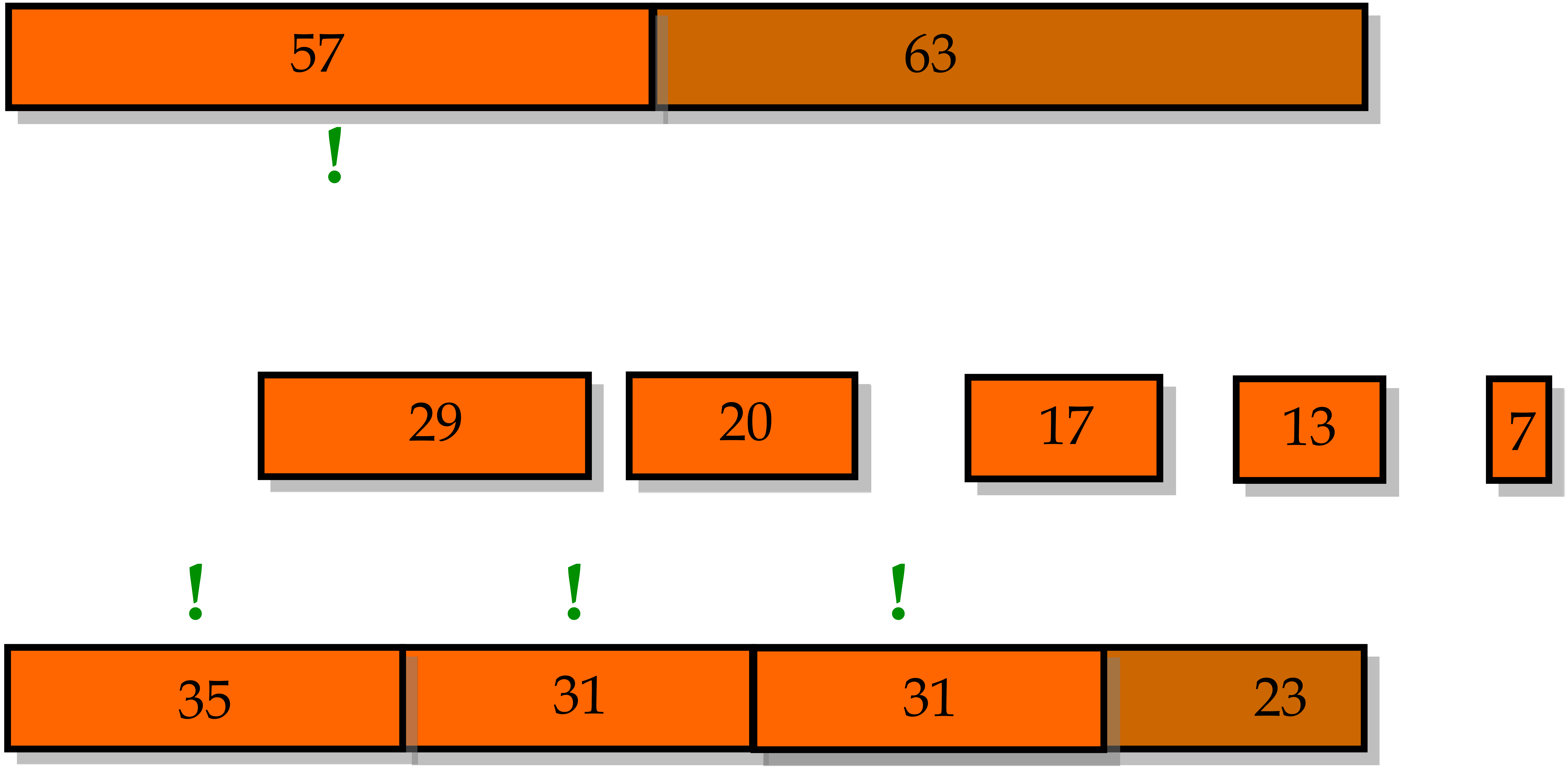
Keine Lösung?!



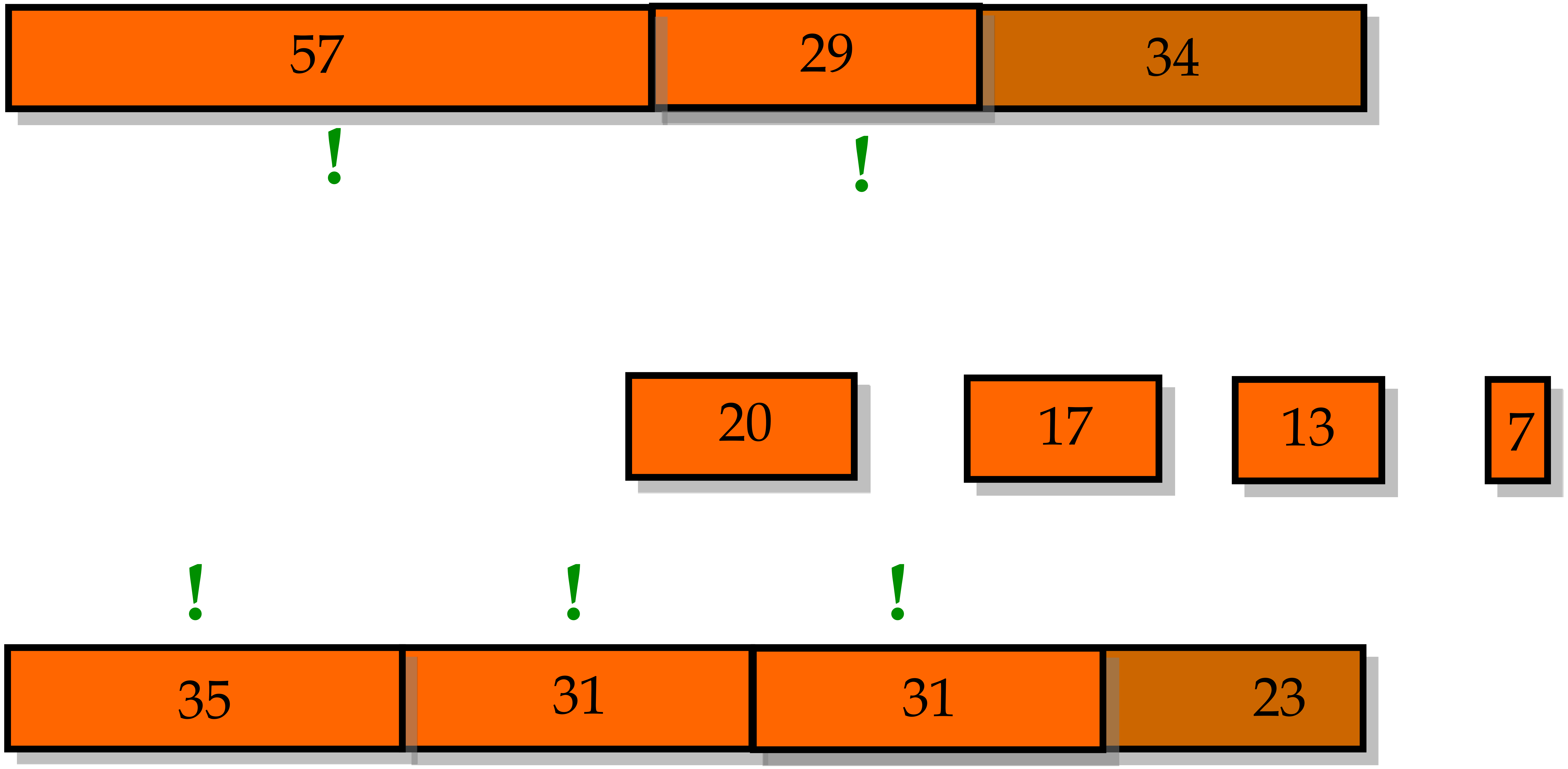
Keine Lösung?!



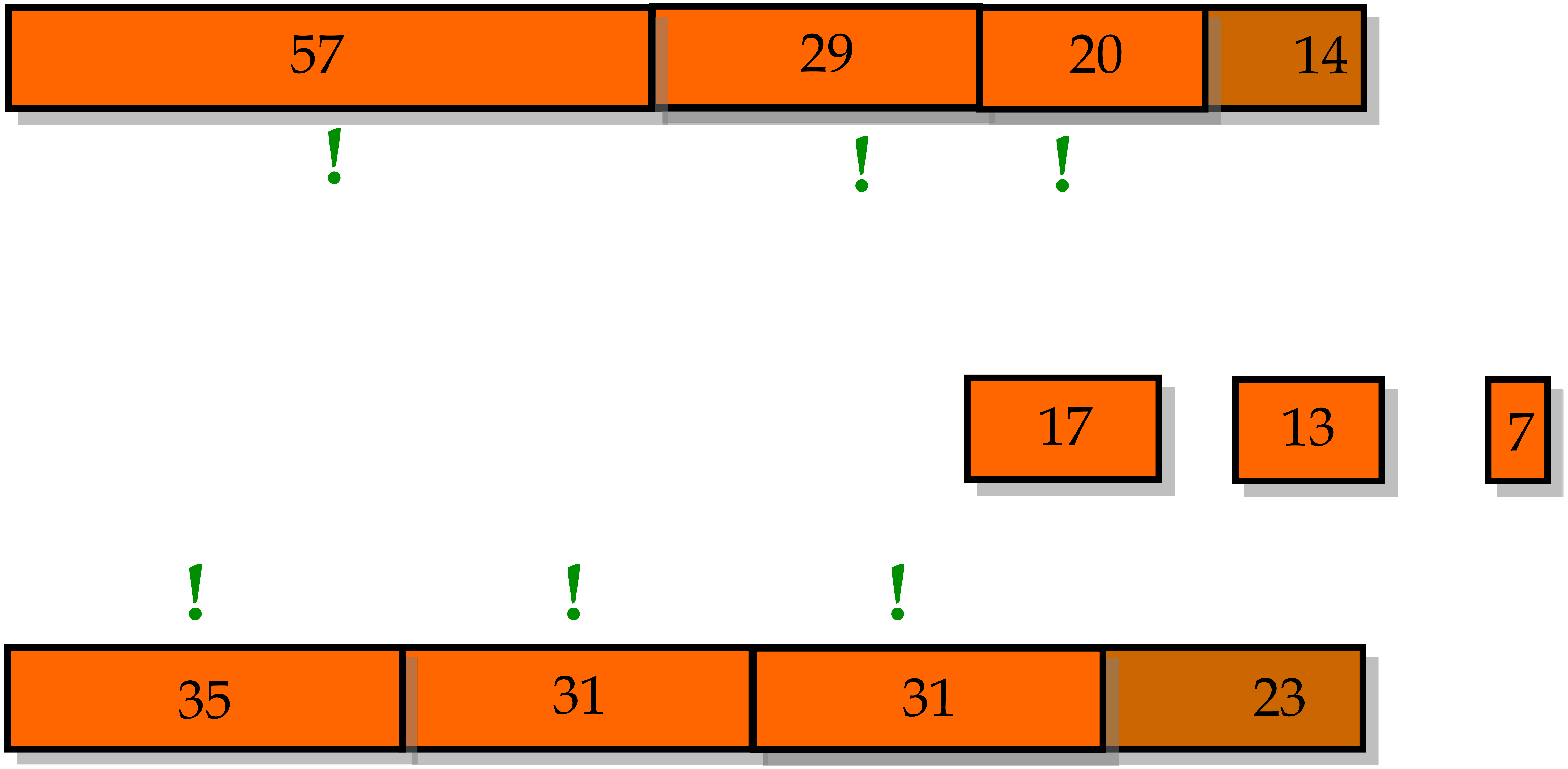
Keine Lösung?!



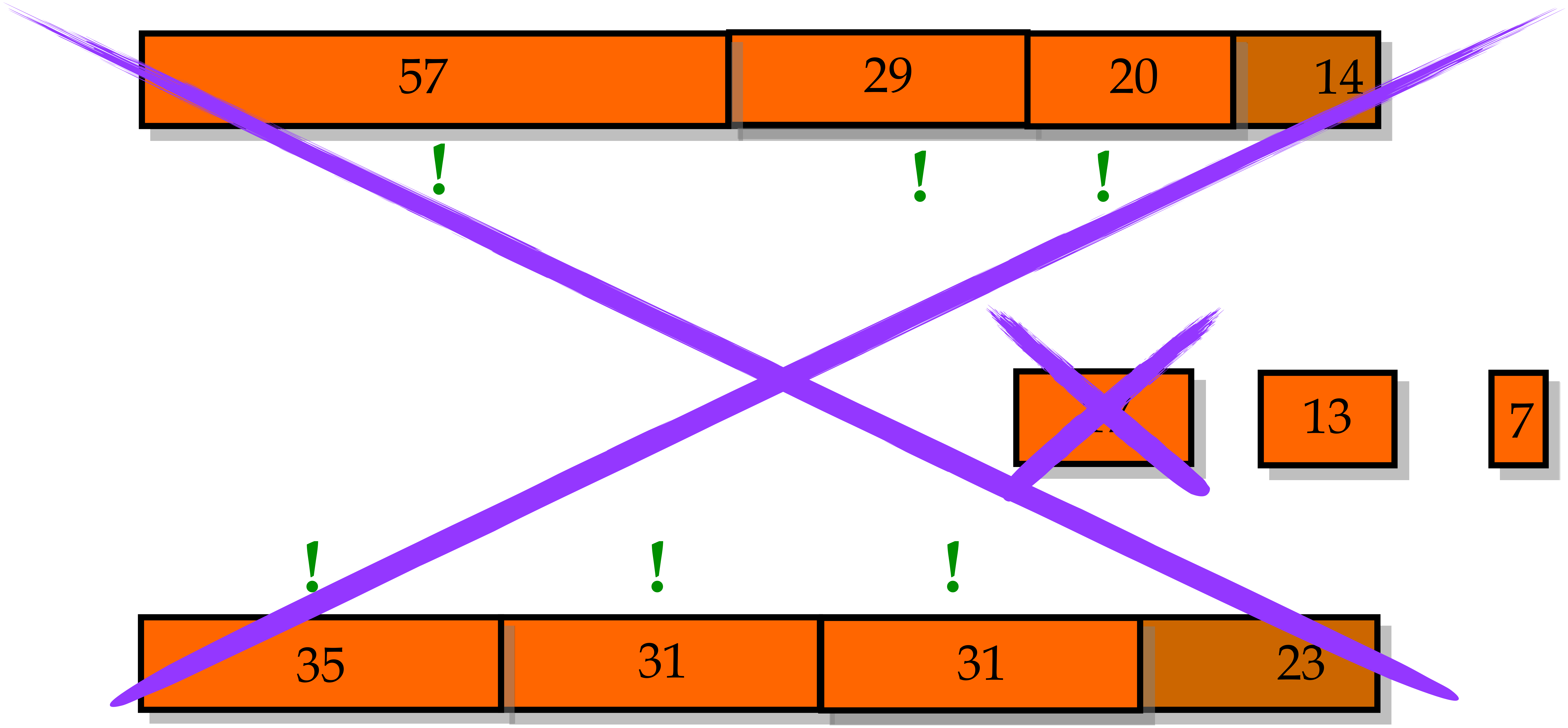
Keine Lösung?!



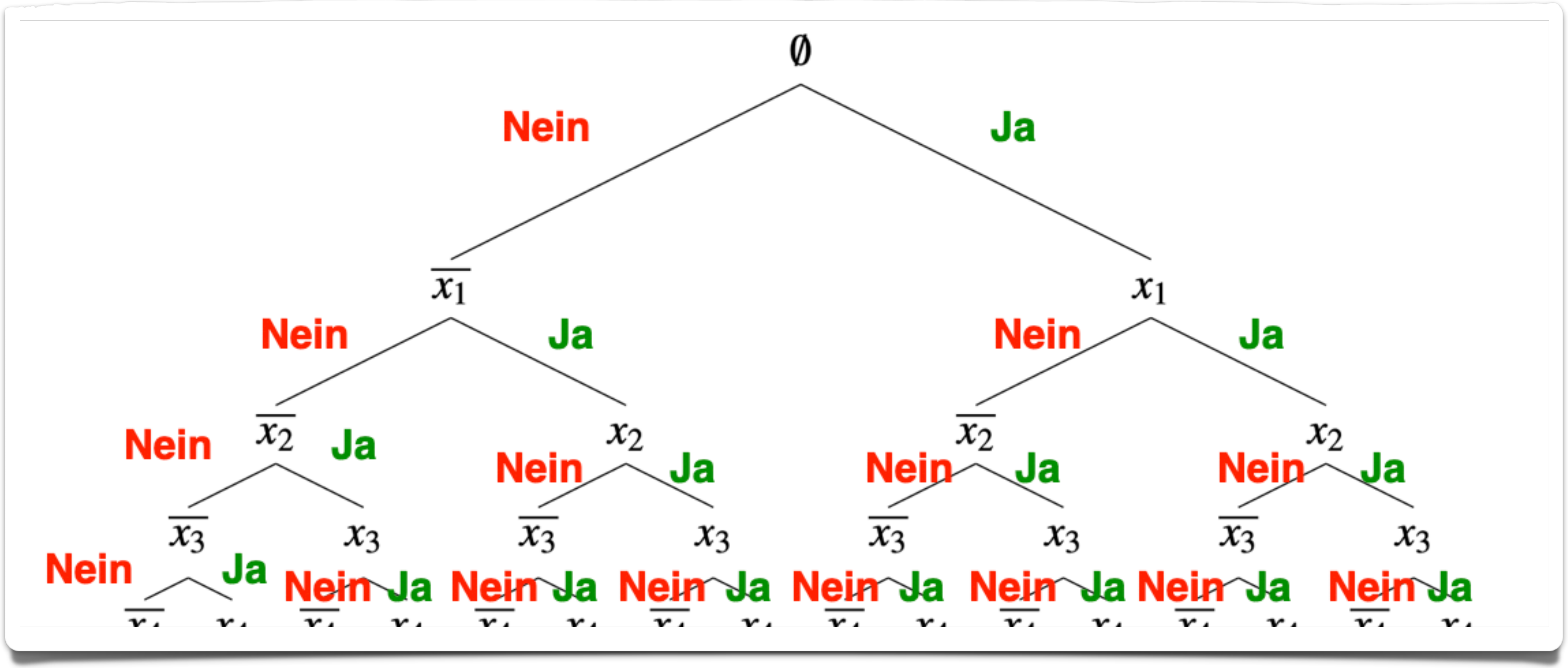
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!

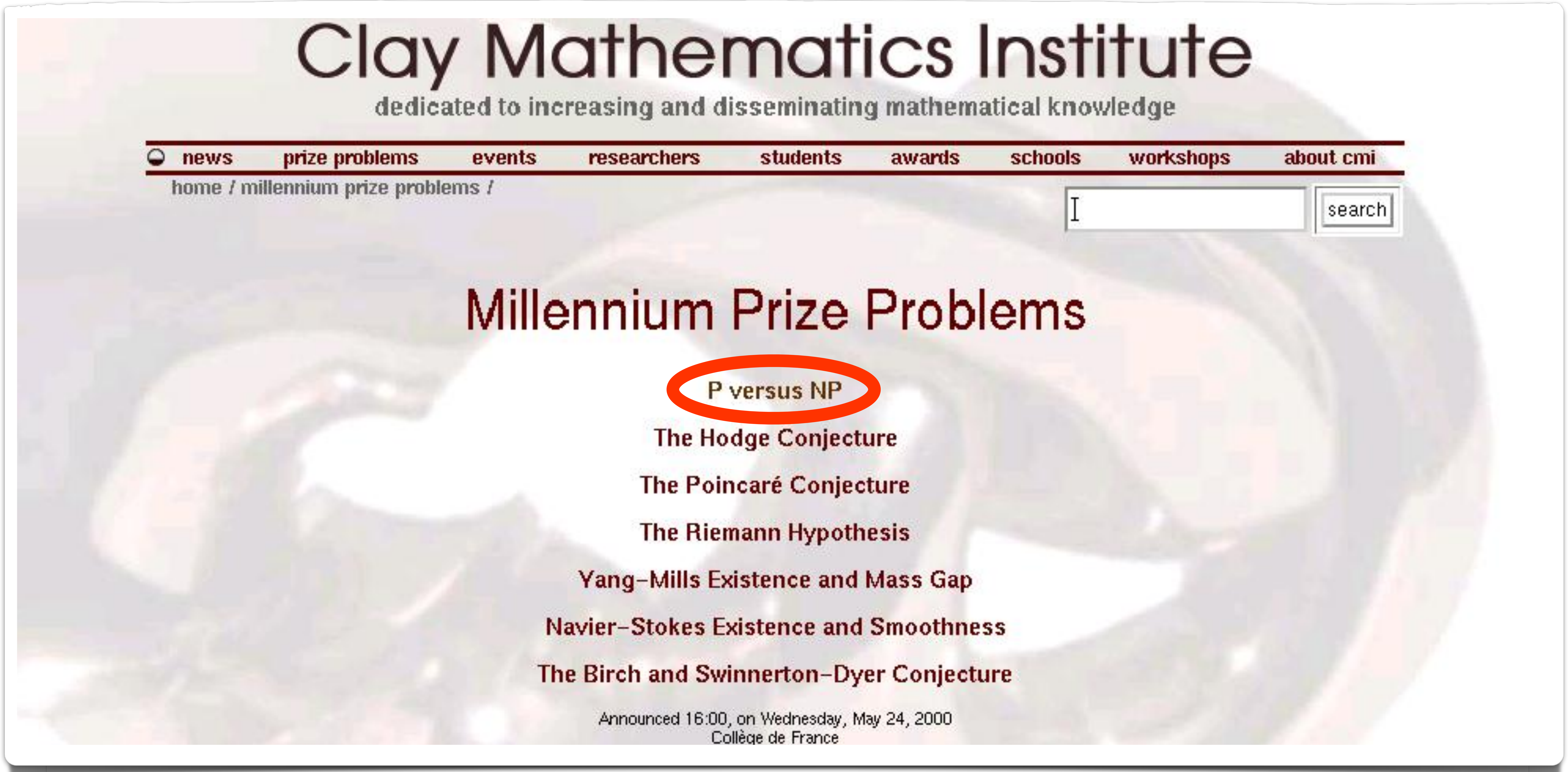


Enumeration

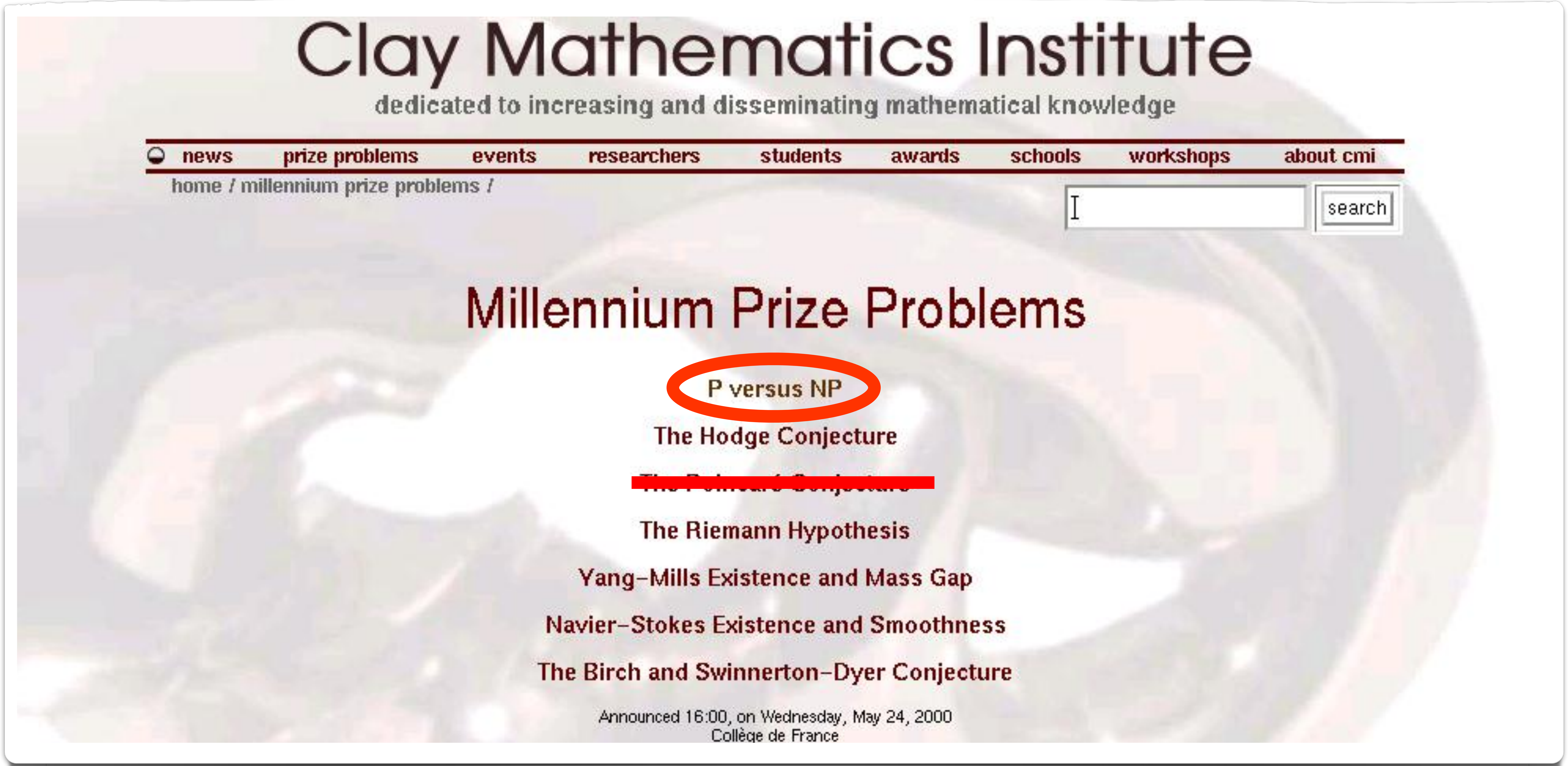


- Exponentiell viele Fälle!
- Kann man Arbeit sparen?

P vs. NP


Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge
news
prize problems
events
researchers
students
awards
schools
workshops
about cmi
home / millennium prize problems /
search
Millennium Prize Problems
P versus NP
The Hodge Conjecture
The Poincaré Conjecture
The Riemann Hypothesis
Yang–Mills Existence and Mass Gap
Navier–Stokes Existence and Smoothness
The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture
Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

P vs. NP



Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge
news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi
home / millennium prize problems /
search
Millennium Prize Problems
P versus NP
The Hodge Conjecture
~~The Poincaré Conjecture~~
The Riemann Hypothesis
Yang–Mills Existence and Mass Gap
Navier–Stokes Existence and Smoothness
The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture
Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.
- Eine formalere Definition (über nichtdeterministische Turingmaschinen) lernt man in Theoretischer Informatik.
- Genau genommen sind Probleme in der Klasse NP Entscheidungsprobleme: Gibt es eine Lösung?
- Die zugehörigen Optimierungsprobleme kann man aber durch eine Reihe von Entscheidungsproblemen lösen:
  - ✓ Gibt es eine Lösung mindestens vom Wert OPT?

5.3 Ein Beispiel mit Logik

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.
Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

$$\begin{aligned}
z_1 &= p_1 = 100110\\
z_2 &= p_2 = 100001\\
z_3 &= p_3 = 10101\\
z_4 &= p_4 = 10010\\
z_5 &= p_5 = 1001\\
z_6 &= p_6 = 1110\\
z_7 &= p_7 = 200\\
z_8 &= p_8 = 100\\
z_9 &= p_9 = 20\\
z_{10} &= p_{10} = 10\\
z_{11} &= p_{11} = 2\\
z_{12} &= p_{12} = 1
\end{aligned}$$

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.
Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

$$\begin{aligned}
z_1 &= p_1 = 100110\\
z_2 &= p_2 = 100001\\
z_3 &= p_3 = 10101\\
z_4 &= p_4 = 10010\\
z_5 &= p_5 = 1001\\
z_6 &= p_6 = 1110\\
z_7 &= p_7 = 200\\
z_8 &= p_8 = 100\\
z_9 &= p_9 = 20\\
z_{10} &= p_{10} = 10\\
z_{11} &= p_{11} = 2\\
z_{12} &= p_{12} = 1
\end{aligned}$$

Gibt es eine Menge $S \subseteq \{1, \ldots 12\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} p_i = Z$?

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= \boxed{1}00110 \\
z_2 = p_2 &= \boxed{1}00001 \\
z_3 = p_3 &= 10101 \\
z_4 = p_4 &= 10010 \\
z_5 = p_5 &= 1001 \\
z_6 = p_6 &= 1110 \\
z_7 = p_7 &= 200 \\
z_8 = p_8 &= 100 \\
z_9 = p_9 &= 20 \\
z_{10} = p_{10} &= 10 \\
z_{11} = p_{11} &= 2 \\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}11444$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110\\
z_2 = p_2 &= 100001\\
z_3 = p_3 &= 10101\\
z_4 = p_4 &= 10010\\
z_5 = p_5 &= 1001\\
z_6 = p_6 &= 1110\\
z_7 = p_7 &= 200\\
z_8 = p_8 &= 100\\
z_9 = p_9 &= 20\\
z_{10} = p_{10} &= 10\\
z_{11} = p_{11} &= 2\\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110\\
z_2 = p_2 &= 100001\\
z_3 = p_3 &= 10101\\
z_4 = p_4 &= 10010\\
z_5 = p_5 &= 1001\\
z_6 = p_6 &= 1110\\
z_7 = p_7 &= 200\\
z_8 = p_8 &= 100\\
z_9 = p_9 &= 20\\
z_{10} = p_{10} &= 10\\
z_{11} = p_{11} &= 2\\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann
kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110 \\
z_2 = p_2 &= 100001 \\
z_3 = p_3 &= 10101 \\
z_4 = p_4 &= 10010 \\
z_5 = p_5 &= 1001 \\
z_6 = p_6 &= 1110 \\
z_7 = p_7 &= 200 \\
z_8 = p_8 &= 100 \\
z_9 = p_9 &= 20 \\
z_{10} = p_{10} &= 10 \\
z_{11} = p_{11} &= 2 \\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

$$111\boxed{4}44$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann
kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann
kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110 \\
z_2 = p_2 &= 100001 \\
z_3 = p_3 &= 10101 \\
z_4 = p_4 &= 10010 \\
z_5 = p_5 &= 1001 \\
z_6 = p_6 &= 1110 \\
z_7 = p_7 &= 200 \\
z_8 = p_8 &= 100 \\
z_9 = p_9 &= 20 \\
z_{10} = p_{10} &= 10 \\
z_{11} = p_{11} &= 2 \\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

$$111444$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann
kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann
kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann
kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 10011\boxed{0} \\
z_2 = p_2 &= 10000\boxed{1} \\
z_3 = p_3 &= 1010\boxed{1} \\
z_4 = p_4 &= 1001\boxed{0} \\
z_5 = p_5 &= 100\boxed{1} \\
z_6 = p_6 &= 111\boxed{0} \\
z_7 = p_7 &= 20\boxed{0} \\
z_8 = p_8 &= 10\boxed{0} \\
z_9 = p_9 &= 2\boxed{0} \\
z_{10} = p_{10} &= 1\boxed{0} \\
z_{11} = p_{11} &= \boxed{2} \\
z_{12} = p_{12} &= \boxed{1}
\end{aligned}
$$

$$11144\boxed{4}$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$x_1 \vee \overline{x_1}$	**1. Ziffer:** Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.	$z_1 = p_1 = 100110$
		$z_2 = p_2 = 100001$
$x_2 \vee \overline{x_2}$	**2. Ziffer:** Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.	$z_3 = p_3 = 10101$
		$z_4 = p_4 = 10010$
$x_3 \vee \overline{x_3}$	**3. Ziffer:** Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.	$z_5 = p_5 = 1001$
		$z_6 = p_6 = 1110$
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$	**4. Ziffer:** Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.	$z_7 = p_7 = 200$
		$z_8 = p_8 = 100$
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$	**5. Ziffer:** Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.	$z_9 = p_9 = 20$
		$z_{10} = p_{10} = 10$
$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$	**6. Ziffer:** Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.	$z_{11} = p_{11} = 2$
		$z_{12} = p_{12} = 1$

111444

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$x_1 \vee \overline{x_1}$ $\quad$ $x_2 \vee \overline{x_2}$ $\quad$ $x_3 \vee \overline{x_3}$

$$\boxed{(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110 \\
z_2 = p_2 &= 100001 \\
z_3 = p_3 &= 10101 \\
z_4 = p_4 &= 10010 \\
z_5 = p_5 &= 1001 \\
z_6 = p_6 &= 1110 \\
z_7 = p_7 &= 200 \\
z_8 = p_8 &= 100 \\
z_9 = p_9 &= 20 \\
z_{10} = p_{10} &= 10 \\
z_{11} = p_{11} &= 2 \\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}$$

111444

Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM — und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

Also: Wenn wir einen „perfekten“ Algorithmus für SUBSET SUM haben, dann können wir auch schnell entscheiden, ob eine logische Formel lösbar ist.

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de