$$P(x,i) = \begin{cases} P(x,i-1), \\ max\{P(x,i- \end{cases}$$

i \ x	0	1	2	3	3	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	+13	
3						

2.2 Dynamic Programming für Knapsack

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2024

Prof. Dr. Sándor Fekete

Beispiel

Beispiel 2.1

$$\{z_1, \ldots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$$

Bestimme alle Zahlen, die als Teilsummen erreichbar sind!

- Vorwärts
- Bestimme erreichbare Zahlen
- Nimm Zahlen hinzu

Prinzip

$$\mathcal{S}(x,i) = \begin{cases} 1, & \text{falls x mit } z_1, ..., z_i \text{ erzeugt werden kann} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$\mathcal{S}(x,0) = 0, \text{ für alle } x \in \{1, ..., Z\}; \mathcal{S}(0,0) = 1$$

i \ x	0	1	2	3	3	5	6	7	…	13	14	15	16	17	18	19	20	…	240
0	1	0	0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	…	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	…	0	0	0	+13	0	0	0	0	…	0
2	1	0	0	0	+13	0	1	…	1	0	0	0	0	0	0	1	…	0	
3																			

$$\mathcal{S}(x, i-1) = 1 \Rightarrow \mathcal{S}(x,i) = 1$$

$$\mathcal{S}(x - z_i, i-1) = 1 \Rightarrow \mathcal{S}(x,i) = 1$$

Algorithmus

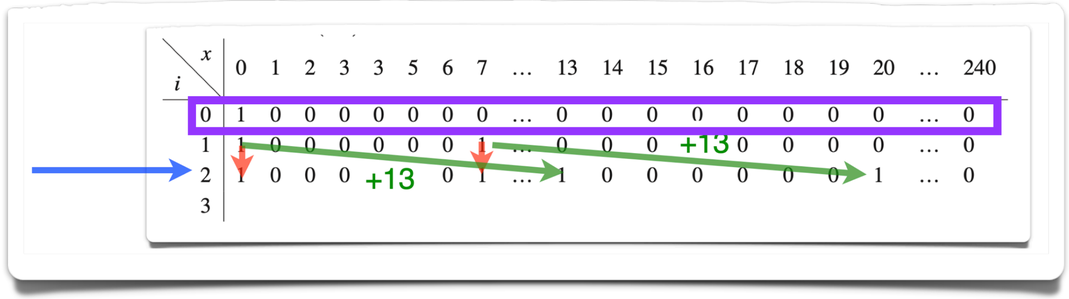
Algorithmus 2.2 . (Dynamic Programming für Subset Sum).

Eingabe: *Zahlen* $z_1, ..., z_n$ *mit* $\sum_{i=1}^{n} z_i = Z$

Ausgabe: *Boolesche Funktion* $\mathcal{S} : \{0, ..., Z\} \times \{0, ..., n\} \to \{0, 1\}$

$$\text{mit } \mathcal{S}(x,i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ mit } z_1, ..., z_i \text{ erzeugt werden kann} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

```
1:  S(0,0) := 1
2:  for (x=1) to Z do
3:      S(x,0) := 0;
4:  for (i = 1) to n do
5:      for (x = 0) to z_i − 1 do
6:          S(x,i) := S(x,i−1);
7:      for (x = z_i) to Z do
8:          if ( S(x,i−1) = 1 OR (S((x−z_i),i−1) = 1) then
9:              S(x,i) := 1;
10:         else
11:             S(x,i) := 0;
12: return
```



Laufzeit

Algorithmus 2.2 . (Dynamic Programming für SUBSET SUM).

Eingabe: *Zahlen* $z_1, ..., z_n$ *mit* $\sum_{i=1}^{n} z_i = Z$

Ausgabe: *Boolesche Funktion* $\mathscr{S} : \{0, ..., Z\} \times \{0, ..., n\} \to \{0, 1\}$

$$\text{mit } \mathscr{S}(x,i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ mit } z_1, ..., z_i \text{ erzeugt werden kann} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

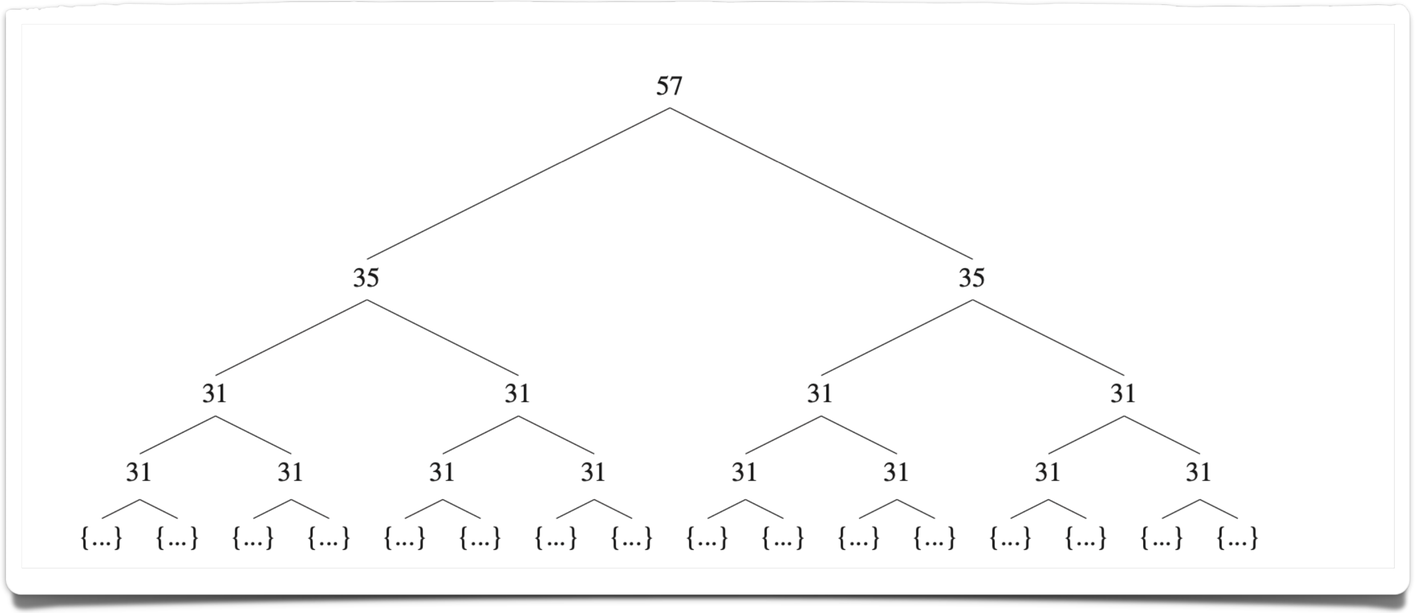
```
1:  S(0,0) := 1
2:  for (x=1) to Z do
3:      S(x,0) := 0;
4:  for (i = 1) to n do
5:      for (x = 0) to z_i − 1 do
6:          S(x,i) := S(x,i−1);
7:      for (x = z_i) to Z do
8:          if ((S(x,i−1) = 1) OR (S((x−z_i),i−1) = 1)) then
9:              S(x,i) := 1;
10:         else
11:             S(x,i) := 0;
12: return
```

$O(nZ)$

Effizienz?!

Dynamic Programming

$O(nZ)$



2^n

- Exponentiell viele Fälle!
- Wo sparen wir Arbeit?

Z klein im Vergleich zu 2^n : viele Duplikate gespart

Z groß im Vergleich zu 2^n : viel unnötige Arbeit

Fragen

- Wie lässt sich das Prinzip verallgemeinern?
- Wie geht das für Knapsack?
- Wie geht das für andere Probleme?

Knapsack

- Objekte $1, \ldots, n$
- Kosten $z_1, \ldots, z_n$
- Nutzen $p_1, \ldots, p_n$

Von Subset Sum zu Knapsack

$$\mathscr{S}(x,i) = \begin{cases} 1, & \text{falls x mit } z_1, ..., z_i \text{ erzeugt werden kann} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

i \ x	0	1	2	3	3	5	6	7	…	13	14	15	16	17	18	19	20	…	240
0	1	0	0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	…	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	…	0	0	0	0	0	0	0	0	…	0
2	1	0	0	0	0	0	0	1	…	1	0	0	0	0	0	0	1	…	0
3	1	0	0	0	0	0	0	1	…	1	0	0	0	1	0	0	1	…	0

$P(x,i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten

$1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

Beispiel: Knapsack

Beispiel 2.4 (Knapsackproblem).

Sei $Z = 9$ und seien folgende sieben Objekte gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2										
3										
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3										
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2										
3										
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3										
4										
5										
6										
7										

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3										
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4										
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5										
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6										
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7										

Dynamic Programming für Knapsack

$P(x, i)$

der höchste Nutzen

der sich mit den Objekten $1, \ldots, i$ erzielen lässt

wenn die Kosten auf x begrenzt sind

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	2	3	6	7	5	9	4
p_i	6	5	8	9	6	7	3

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Systematisch!

„Bellman-Rekursion“

$$P(x,i) = \begin{cases} P(x,i-1), & \text{falls } z_i > x \\ max\{P(x,i-1), P(x-z_i,i-1)+p_i\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$

2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung

3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Historie

Richard Bellman (1920-1984)

DYNAMIC
PROGRAMMING

BY

RICHARD BELLMAN

1957

PRINCETON UNIVERSITY PRESS
PRINCETON, NEW JERSEY

Preface

The purpose of this work is to provide an introduction to the mathematical theory of multi-stage decision processes. Since these constitute a somewhat formidable set of terms we have coined the term "dynamic programming" to describe the subject matter. Actually, as we shall see, the distinction involves more than nomenclature. Rather, it involves a certain conceptual framework which furnishes us a new and versatile mathematical tool for the treatment of many novel and interesting problems both in this new discipline and in various parts of classical analysis. Before expanding upon this theme, let us present a brief discussion of what is meant by a multi-stage decision process.

The functional equations which arise in this way are of a novel type, completely different from any of the functional equations encountered in classical analysis. The particular one we shall employ for purposes of discussion in this chapter is

$$(1) \qquad f(x) = \operatorname*{Max}_{0 \le y \le x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))].$$

where g and h are known functions and a and b are known constants, satisfying the condition $0 \le a, b < 1$.

Algorithmus

Algorithmus 2.5 *(Dynamic Programming für Knapsack)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: *Funktion* $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$mit\ P(x,i) = max \sum_{i=1}^{i} p_j y_j\ mit \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x,\ für\ y_j \in \{0,1\}$$

```
1:  for (x = 0) to Z do
2:      P(x,0) := 0
3:  for (i = 1) to n do
4:      for (x = 0) to (z_i − 1) do
5:          P(x,i) := P(x,i−1)
6:      for (x = z_i) to Z do
7:          if ((P(x − z_i, i − 1) + p_i) > P(x,i−1)) then
8:              P(x,i) := P(x − z_i, i − 1) + p_i
9:          else
0:              P(x,i) := P(x,i−1)
```

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Korrektheit und Laufzeit

Satz 2.6 *Algorithmus 2.5 berechnet besten Lösungswert für das Rucksackproblem in einer Laufzeit $O(nZ)$.*

Algorithmus 2.5 *(Dynamic Programming für Knapsack)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: Funktion $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$\text{mit } P(x,i) = max \sum_{i=1}^{i} p_j y_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x, \text{ für } y_j \in \{0,1\}$$

```
1: for (x = 0) to Z do
2:     P(x,0) := 0
3: for (i = 1) to n do
4:     for (x = 0) to (z_i − 1) do
5:         P(x,i) := P(x,i−1)
6:     for (x = z_i) to Z do
7:         if ((P(x − z_i, i−1) + p_i) > P(x,i−1)) then
8:             P(x,i) := P(x − z_i, i−1) + p_i
9:         else
0:             P(x,i) := P(x,i−1)
```

$O(nZ)$

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Induktion!

1. Objekt i ist zu teuer für Kostenschranke x, falls $z_i > x$
2. Objekt i ist nicht zu teuer, bringt aber keine Verbesserung
3. Objekt i ist nicht zu teuer und bringt eine Verbesserung

Sparsamer?!

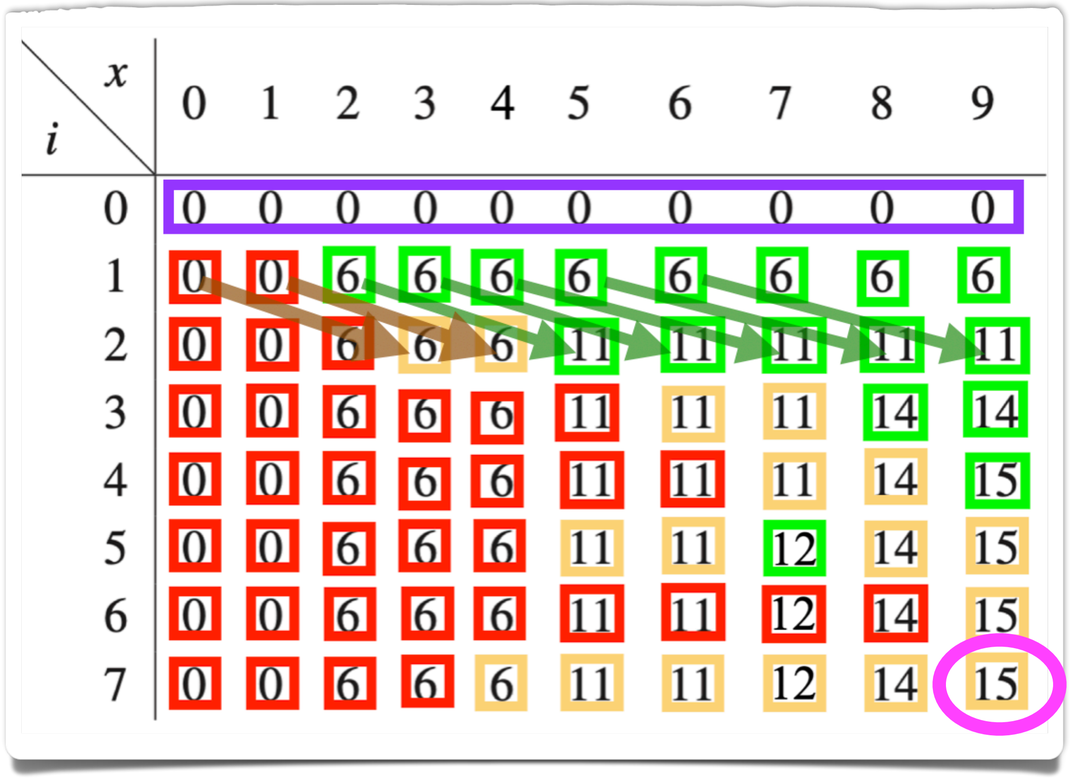
Limitierender Faktor bei Dynamic Programming?

- Laufzeit?
- Speicherplatz!

$O(nZ)$

Idee:

- Nicht ganze Tabelle speichern
- Nur die relevante Zeile

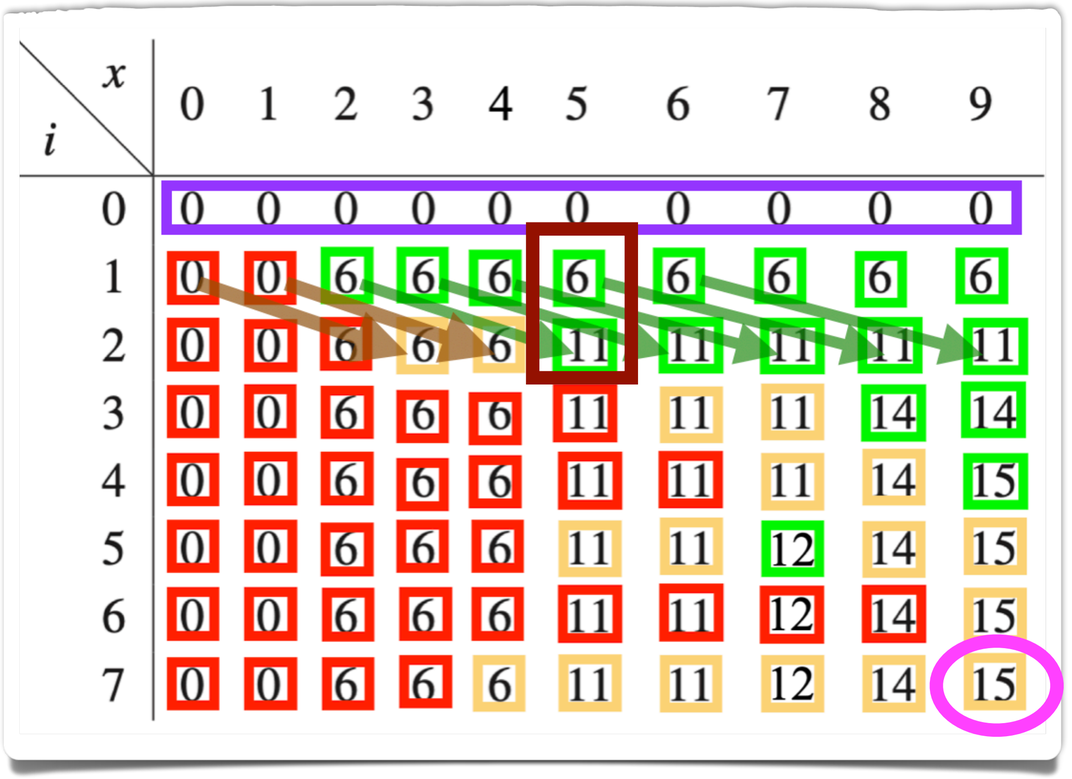


i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Sparsamer!

Ideen:

- Nur die jeweils letzte Zeile wird benötigt
- Updates von rechts nach links, damit nur erledigte Werte überschrieben werden



i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15
5	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
6	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15
7	0	0	6	6	6	11	11	12	14	15

Algorithmus (sparsamer)

Algorithmus 2.7 Dynamic Programming für MAXIMUM KNAPSACK - sparsamer

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: Funktion $P : \{1, ..., Z\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto P(x)$

$$\text{mit } P(x) = \max \sum_{j=1}^{n} p_j y_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} z_j y_j \leq x, \text{ für } y_j \in \{0, 1\}$$

```
1: for (x = 0) to Z do
2:     P(x) := 0
3: for (i = 1) to n do
4:     for (x = Z) downto z_i do
5:         if ((P(x − z_i) + p_i) > P(x)) then
6:             P(x) := P(x − z_i) + p_i
7: return p* := P(Z)
```

Korrektheit und Laufzeit

Satz 2.8 *Algorithmus 2.7 berechnet besten Lösungswert für das Rucksackproblem in einer Laufzeit $O(nZ)$.*

Algorithmus 2.5 *(Dynamic Programming für Knapsack)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: *Funktion* $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$mit\ P(x,i) = max \sum_{j=1}^{i} p_j y_j\ mit\ \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x,\ für\ y_j \in \{0,1\}$$

```
1:  for (x = 0) to Z do
2:      P(x,0) := 0
3:  for (i = 1) to n do
4:      for (x = 0) to (z_i − 1) do
5:          P(x,i) := P(x,i−1)
6:      for (x = z_i) to Z do
7:          if ((P(x − z_i, i−1) + p_i) > P(x,i−1)) then
8:              P(x,i) := P(x − z_i, i−1) + p_i
9:          else
10:             P(x,i) := P(x,i−1)
```

Algorithmus 2.7 *(Dynamic Programming für Knapsack - sparsamer)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: *Funktion* $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$mit\ P(x,i) = max \sum_{j=1}^{i} p_j y_j\ mit\ \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x,\ für\ y_j \in \{0,1\}$$

```
1:  for (x = 0) to Z do
2:      P(x,0) := 0
3:  for (i = 1) to n do
4:      for (x = Z) downto z_i do
5:          if ((P(x − z_i) + p_i) > P(x)) then
6:              P(x,i) := P(x − z_i) + p_i
7:  return p* := P(Z)
```

Korrektheit und Laufzeit

Satz 2.8 *Algorithmus 2.7 berechnet besten Lösungswert für das Rucksackproblem in einer Laufzeit O(nZ).*

Algorithmus 2.5 *(Dynamic Programming für Knapsack)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: *Funktion* $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$\text{mit } P(x,i) = max \sum_{i=1}^{i} p_j y_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x, \text{ für } y_j \in \{0,1\}$$

```
1:  for (x = 0) to Z do
2:      P(x,0) := 0
3:  for (i = 1) to n do
4:      for (x = 0) to (z_i − 1) do
5:          P(x,i) := P(x,i−1)
6:      for (x = z_i) to Z do
7:          if ((P(x − z_i, i−1) + p_i) > P(x,i−1)) then
8:              P(x,i) := P(x − z_i, i−1) + p_i
9:          else
10:             P(x,i) := P(x,i−1)
```

$O(nZ)$

Algorithmus 2.7 *(Dynamic Programming für Knapsack - sparsamer)*

Eingabe: $z_1, ..., z_n, Z, p_1, ...p_n$

Ausgabe: *Funktion* $P : \{1, ..., Z\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R};\ (x, i) \mapsto P(x, i)$

$$\text{mit } P(x,i) = max \sum_{i=1}^{i} p_j y_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{i} z_j y_j \leq x, \text{ für } y_j \in \{0,1\}$$

```
1:  for (x = 0) to Z do
2:      P(x,0) := 0
3:  for (i = 1) to n do
4:      for (x = Z) downto z_i do
5:          if ((P(x − z_i) + p_i) > P(x)) then
6:              P(x,i) := P(x − z_i) + p_i
7:  return p* := P(Z)
```

$$P(x,i) = \begin{cases} P(x,i-1), \\ max\{P(x,i- \end{cases}$$

i \ x	0	1	2	3	3	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	+13	
3						

2.3 Andere Beispiele für Dynamic Programming

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2024

Prof. Dr. Sándor Fekete

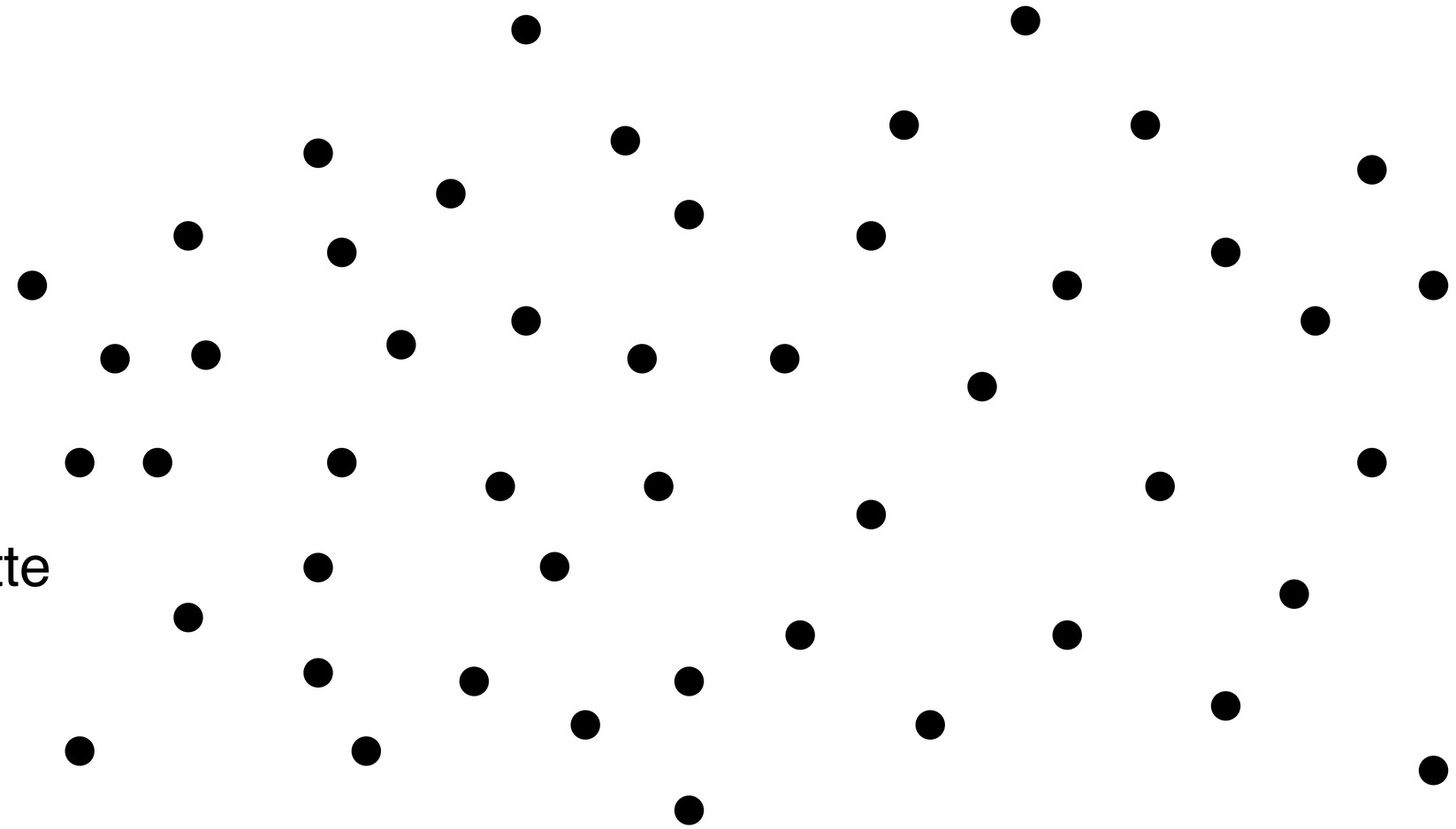
Längste konvexe Kette

Gegeben:

Punktmenge

Gesucht:

Längste konvexe Kette



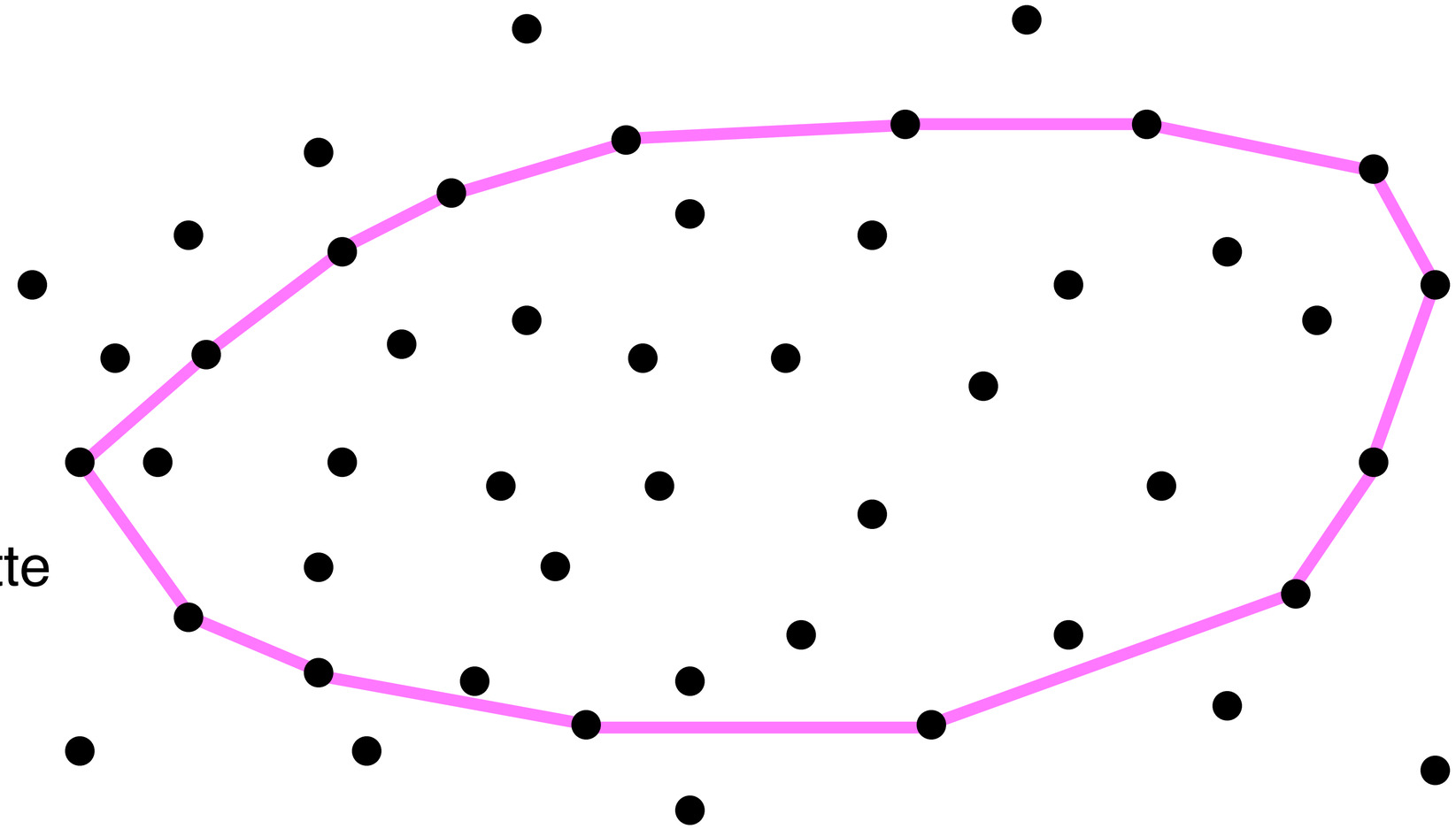
Längste konvexe Kette

Gegeben:

Punktmenge

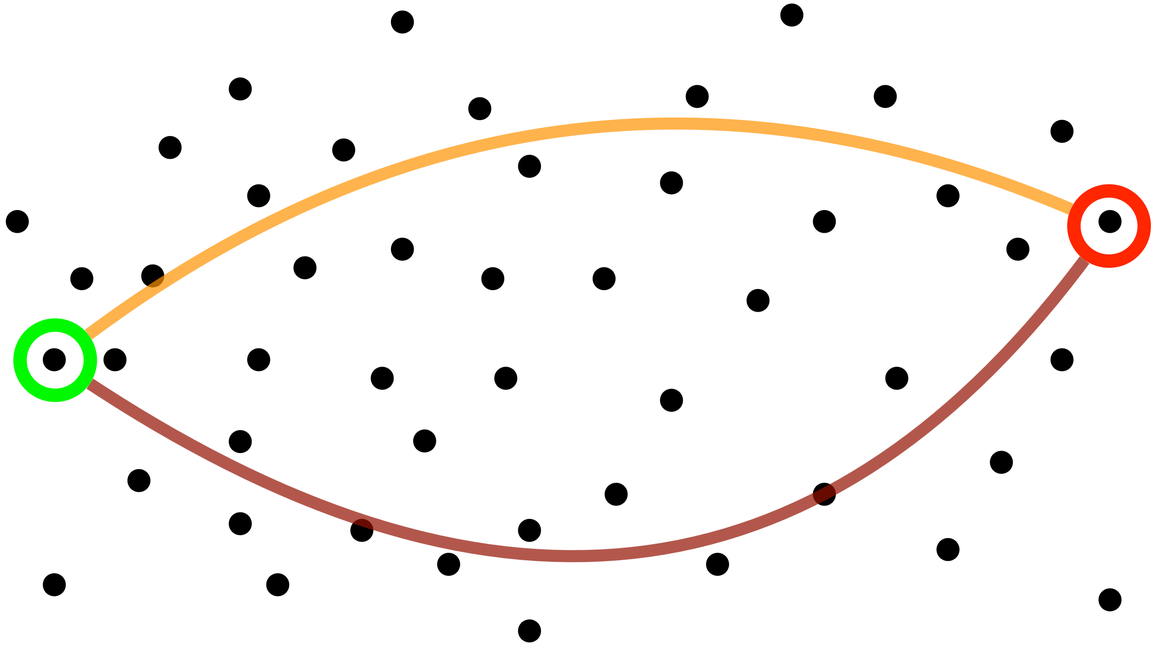
Gesucht:

Längste konvexe Kette



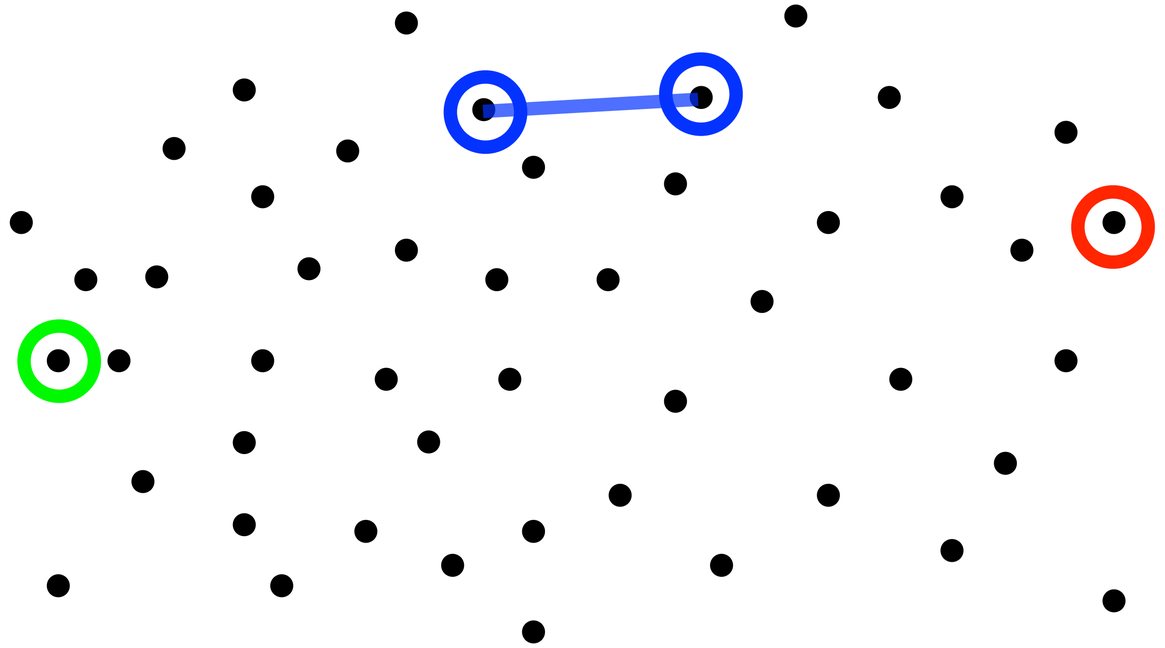
Idee

1. Enumeriere Startpunkt
   1.1 Enumeriere Endpunkt
      1.1.1. Betrachte obere und untere Kette



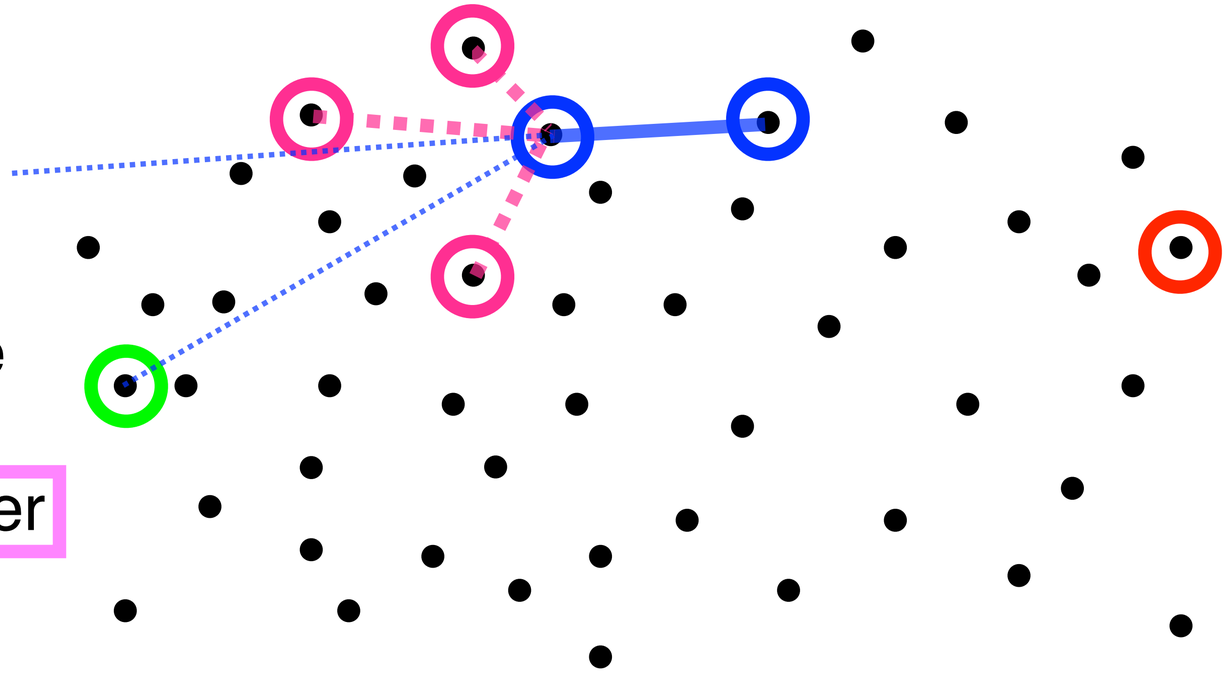
Idee

1. Enumeriere Startpunkt
   1.1 Enumeriere Endpunkt
      1.1.1. Betrachte obere und untere Kette
         1.1.1.1 Für jedes Punktepaar:



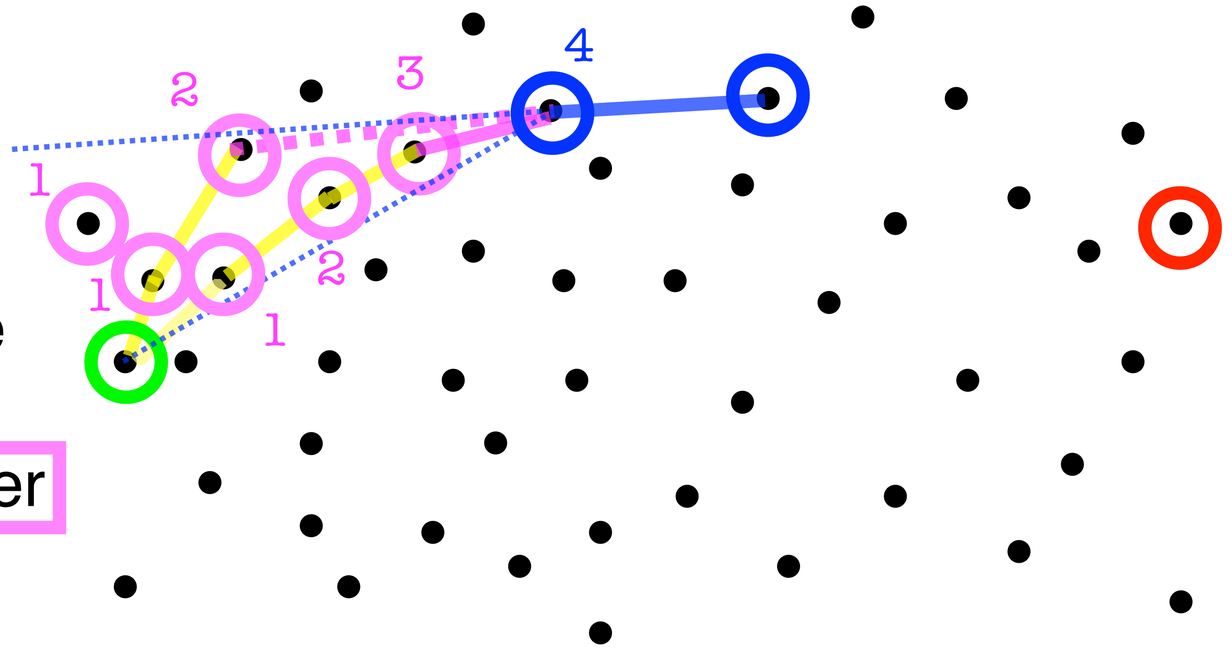
Idee

1. Enumeriere Startpunkt
   1.1 Enumeriere Endpunkt
      1.1.1. Betrachte obere und untere Kette
         1.1.1.1 Für jedes Punktepaar:
            1.1.1.1.1. Ermittle besten Vorgänger



Idee

1. Enumeriere Startpunkt
   1.1 Enumeriere Endpunkt
      1.1.1.Betrachte obere und untere Kette
         1.1.1.1 Für jedes Punktepaar:
            1.1.1.1.1.Ermittle besten Vorgänger



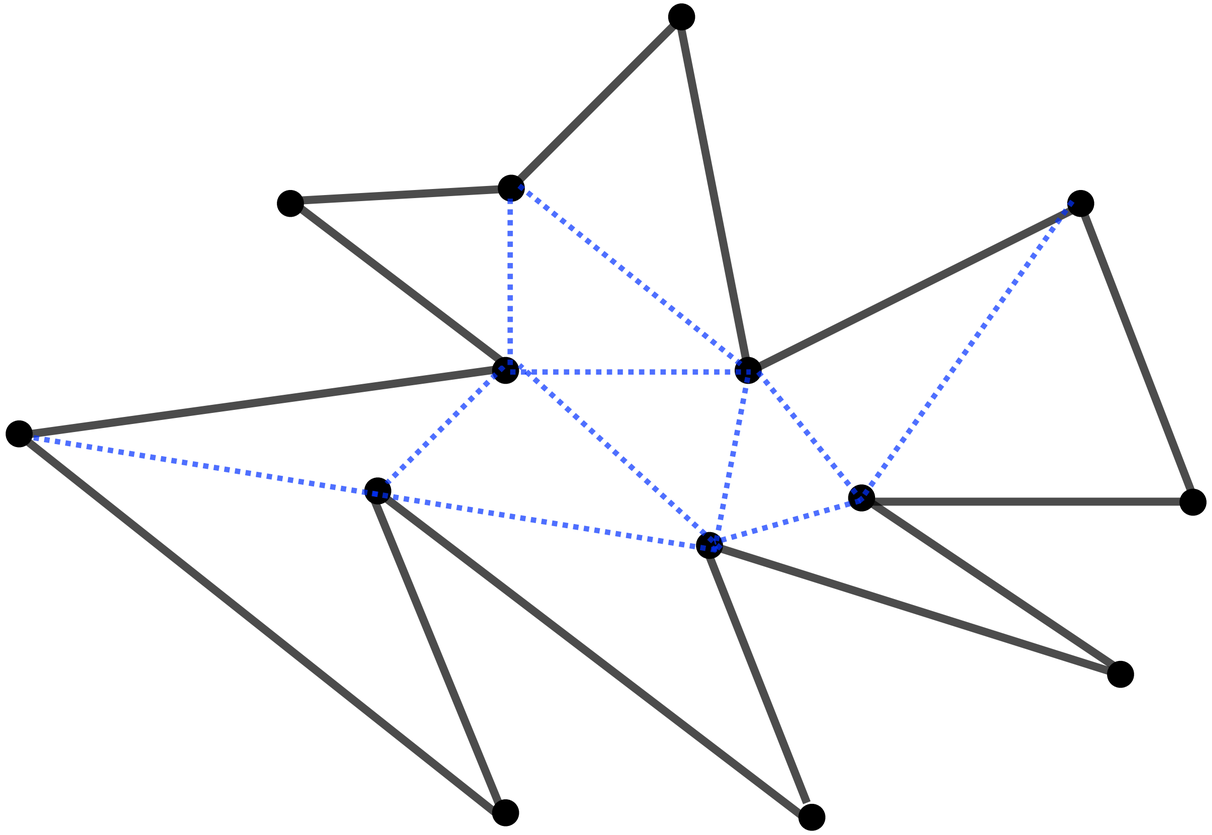
Optimale Triangulation

Gegeben:

„Einfaches“ Polygon
(mit zusammenhängendem Rand)

Gesucht:

Optimale Unterteilung in Dreiecke
durch „Diagonalen“



Optimale Triangulation

Gegeben:

„Einfaches“ Polygon
(mit zusammenhängendem Rand)

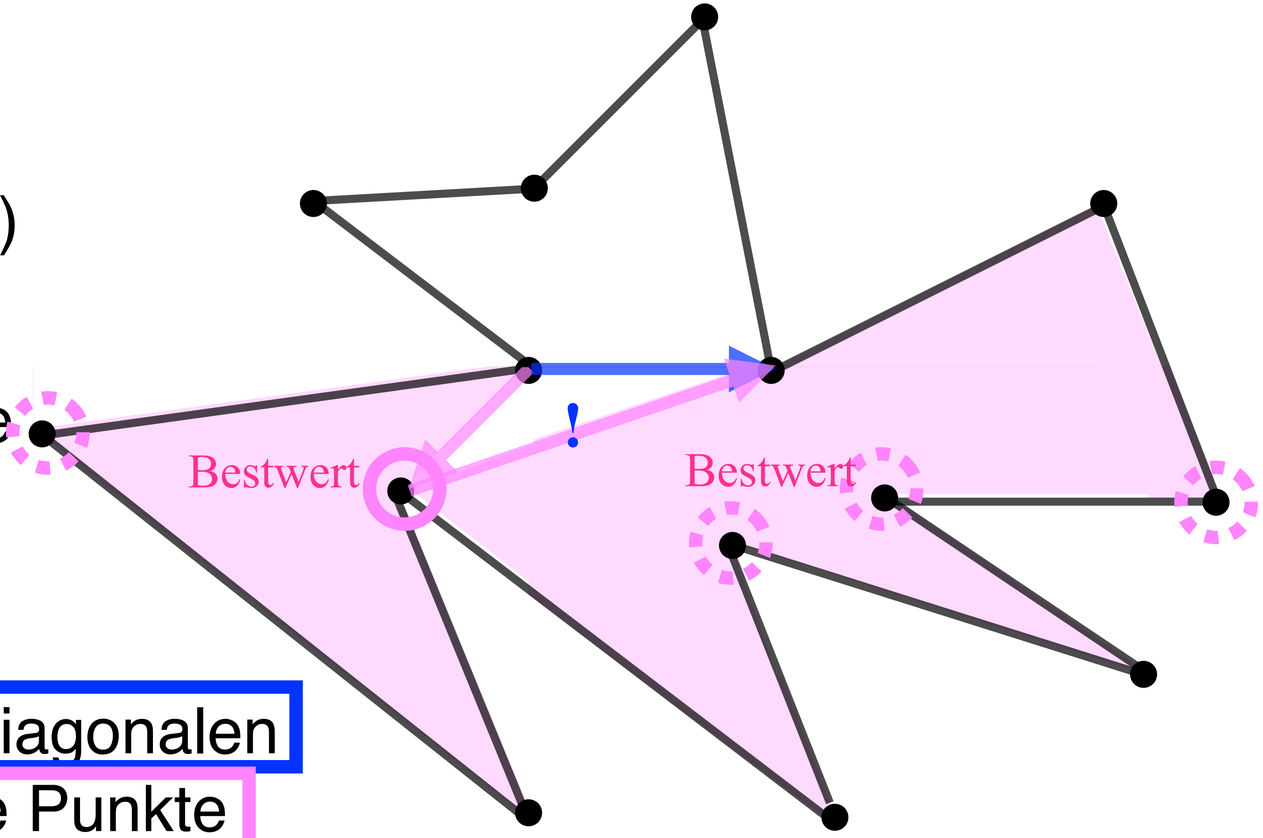
Gesucht:

Optimale Unterteilung in Dreiecke
durch „Diagonalen“

Idee:

1.Berechne für alle (gerichtete) Diagonalen

1.1.Optimiere über möglich dritte Punkte



Andere geometrische Probleme

CCCG 2014, Halifax, Nova Scotia, August 11–13, 2014

On the Chromatic Art Gallery Problem

Sándor P. Fekete* Stephan Friedrichs* Michael Hemmer* Joseph B. M. Mitchell†
Christiane Schmidt*

Abstract

For a polygonal region P with n vertices, a *guard cover* S is a set of points in P, such that any point in P can be seen from a point in S. In a *colored guard cover*, every element in a guard cover is assigned a color, such that no two guards with the same color have overlapping visibility regions. The Chromatic Art Gallery Problem (CAGP) asks for the minimum number of colors for which a colored guard cover exists.

We discuss the CAGP for the case of only two colors. We show that it is already *NP*-hard to decide whether two colors suffice for covering a polygon with holes, even when arbitrary guard positions are allowed. For simple polygons with a discrete set of possible guard locations, we give a polynomial-time algorithm for deciding whether a two-colorable guard set exists. This algo-

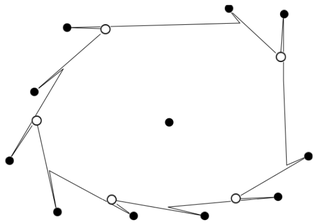


Figure 1: An example polygon with $n = 20$ vertices. A minimum-cardinality guard cover with $n/4$ guards (shown in white) requires $n/4$ colors, while a minimum-color guard cover (shown in black) has $n/2 + 1$ guards and requires only 3 colors.

Theorem 4.1 *For a simple polygon P with n vertices and ℓ discrete guard locations L, it can be decided in polynomial time whether there is a 2-colorable guard set.*

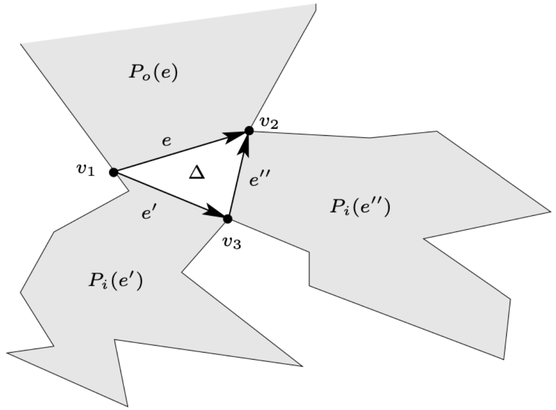


Figure 7: Solving a subproblem (e, Γ) by combining solutions for subproblems (e', Γ') and (e'', Γ'').

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de