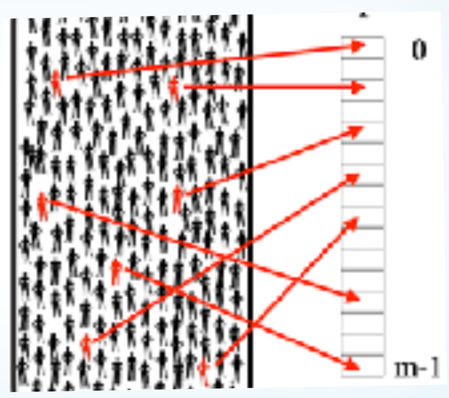


7 Hashing

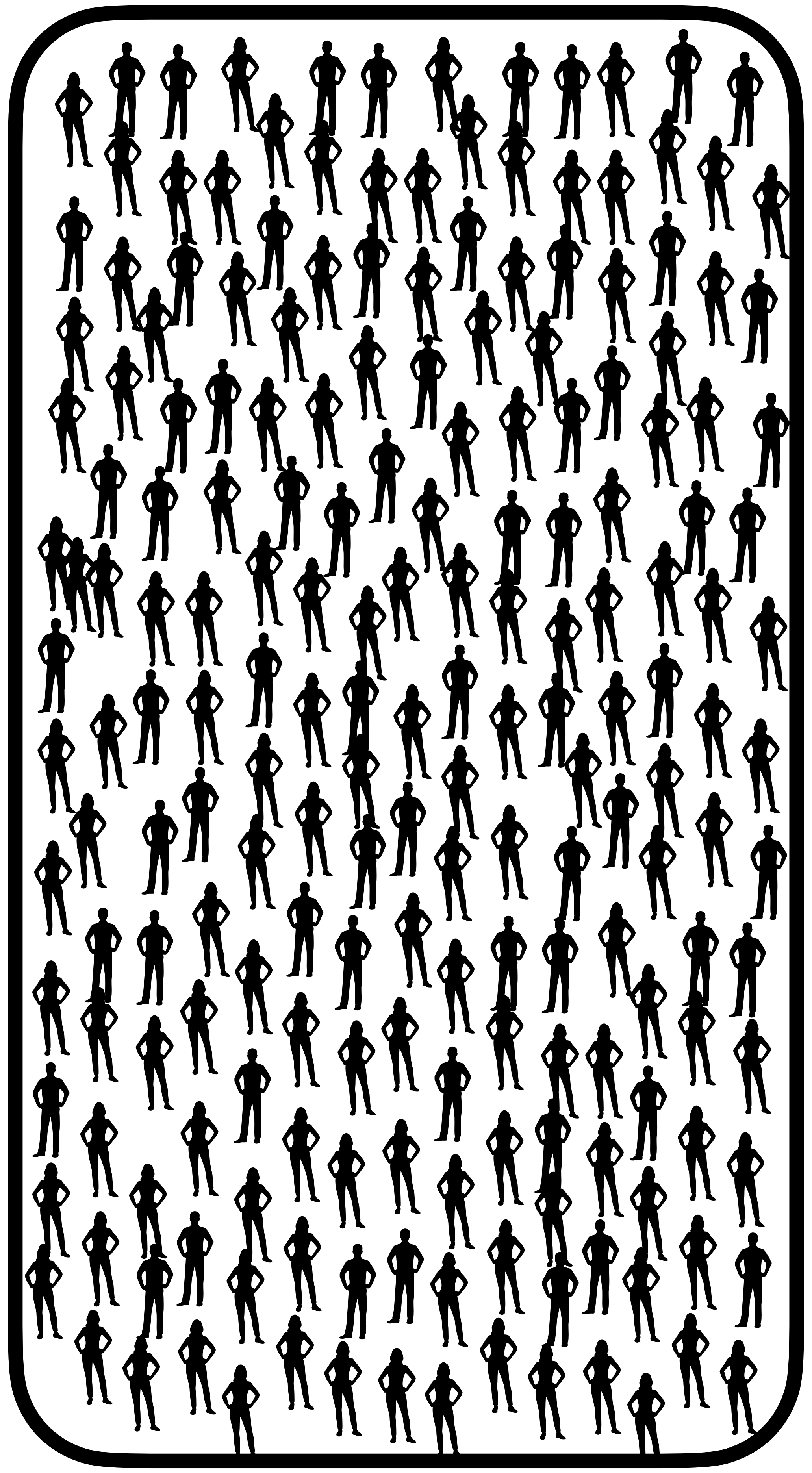
Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2024

Prof. Dr. Sándor Fekete

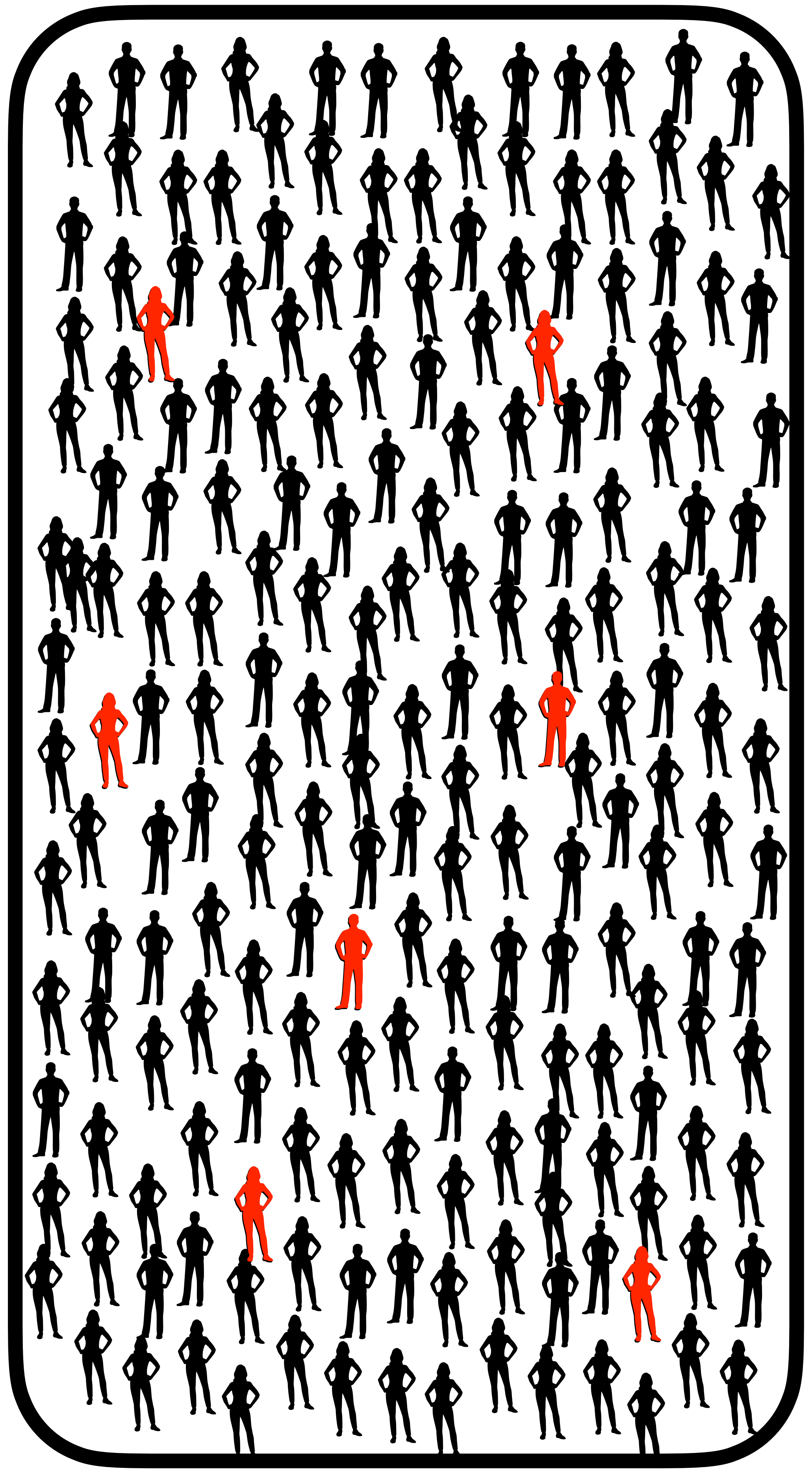
7.1 Motivation

Aufgabenstellung

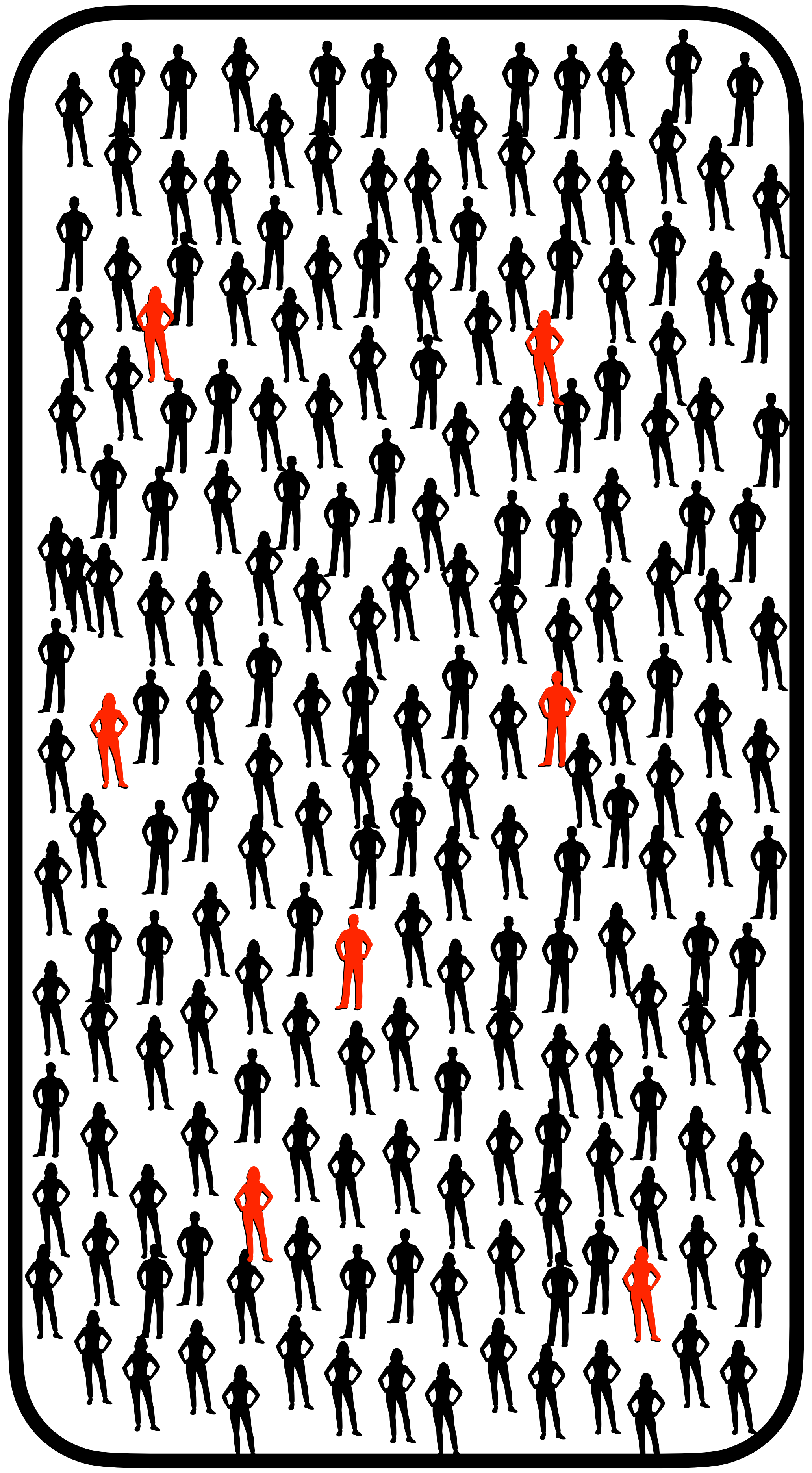
Aufgabenstellung



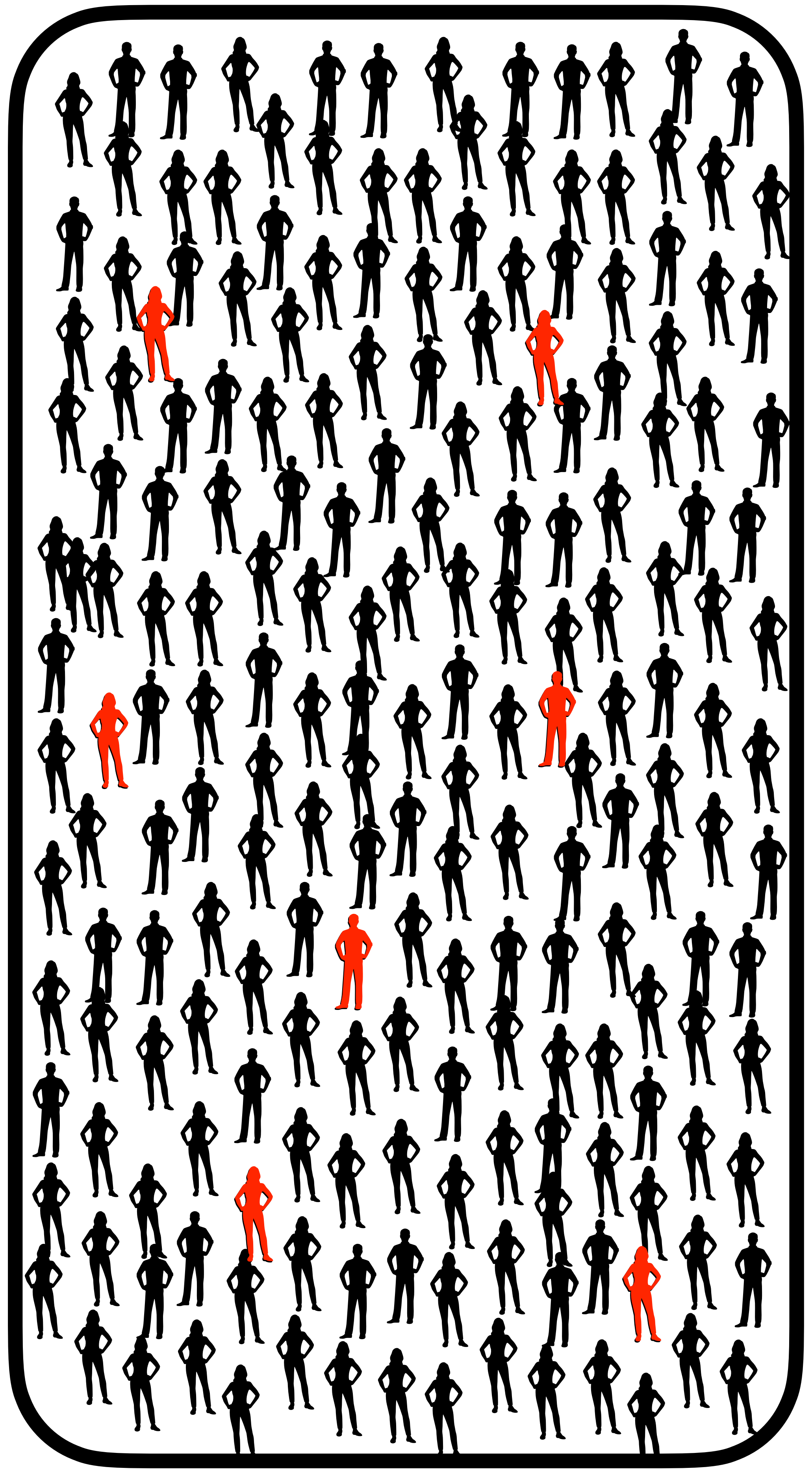
Aufgabenstellung



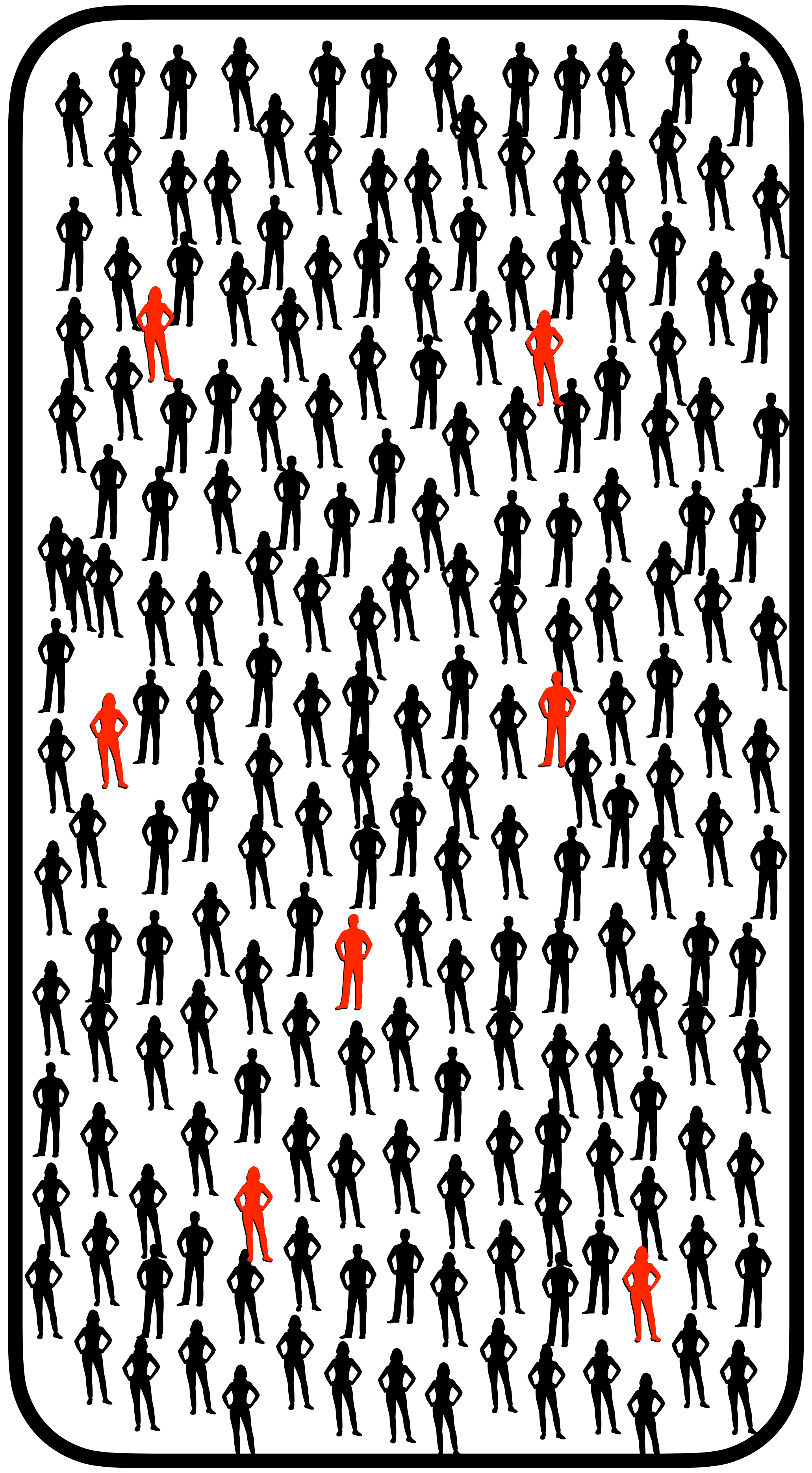
Aufgabenstellung



Aufgabenstellung

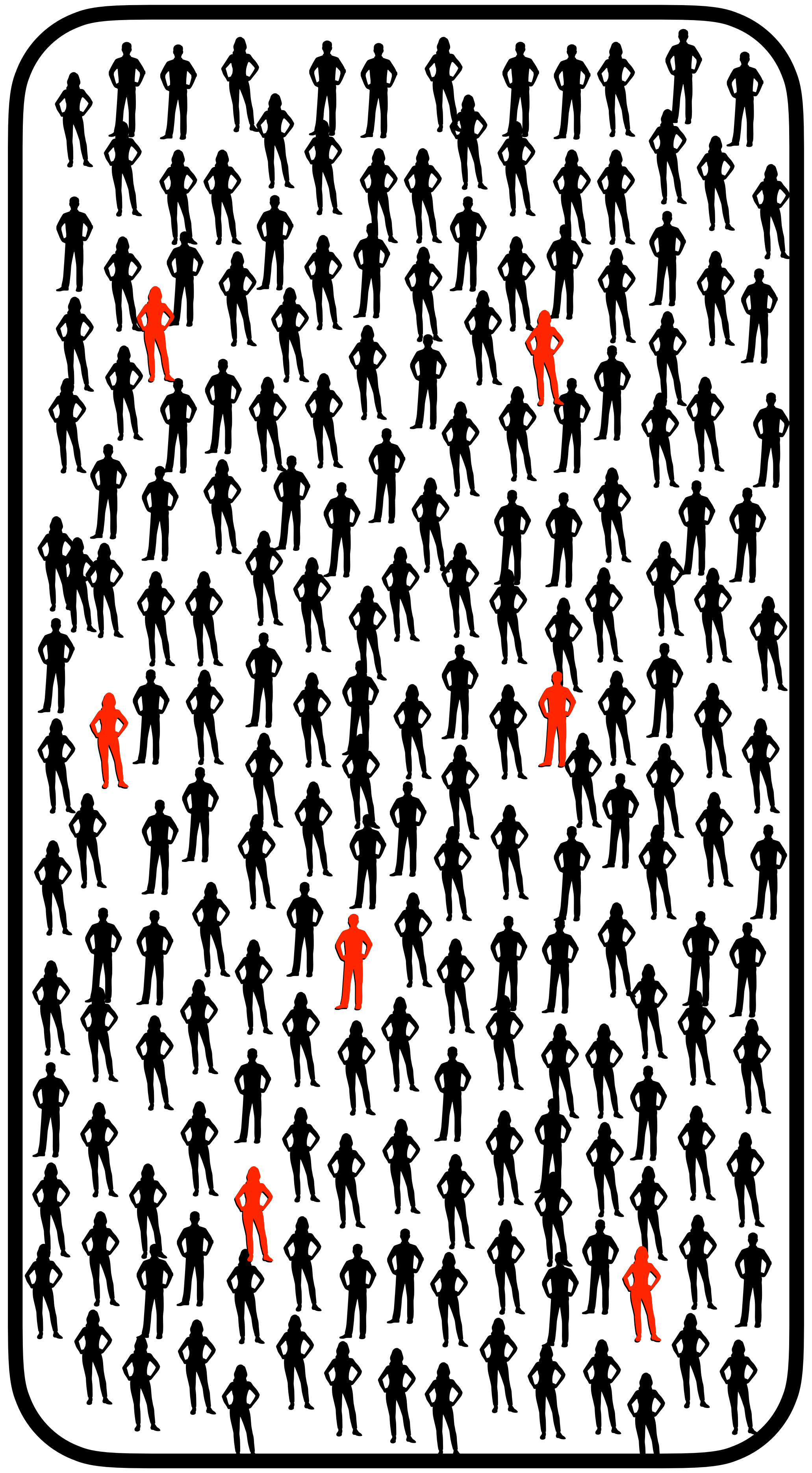


Aufgabenstellung



Hashing

Aufgabenstellung

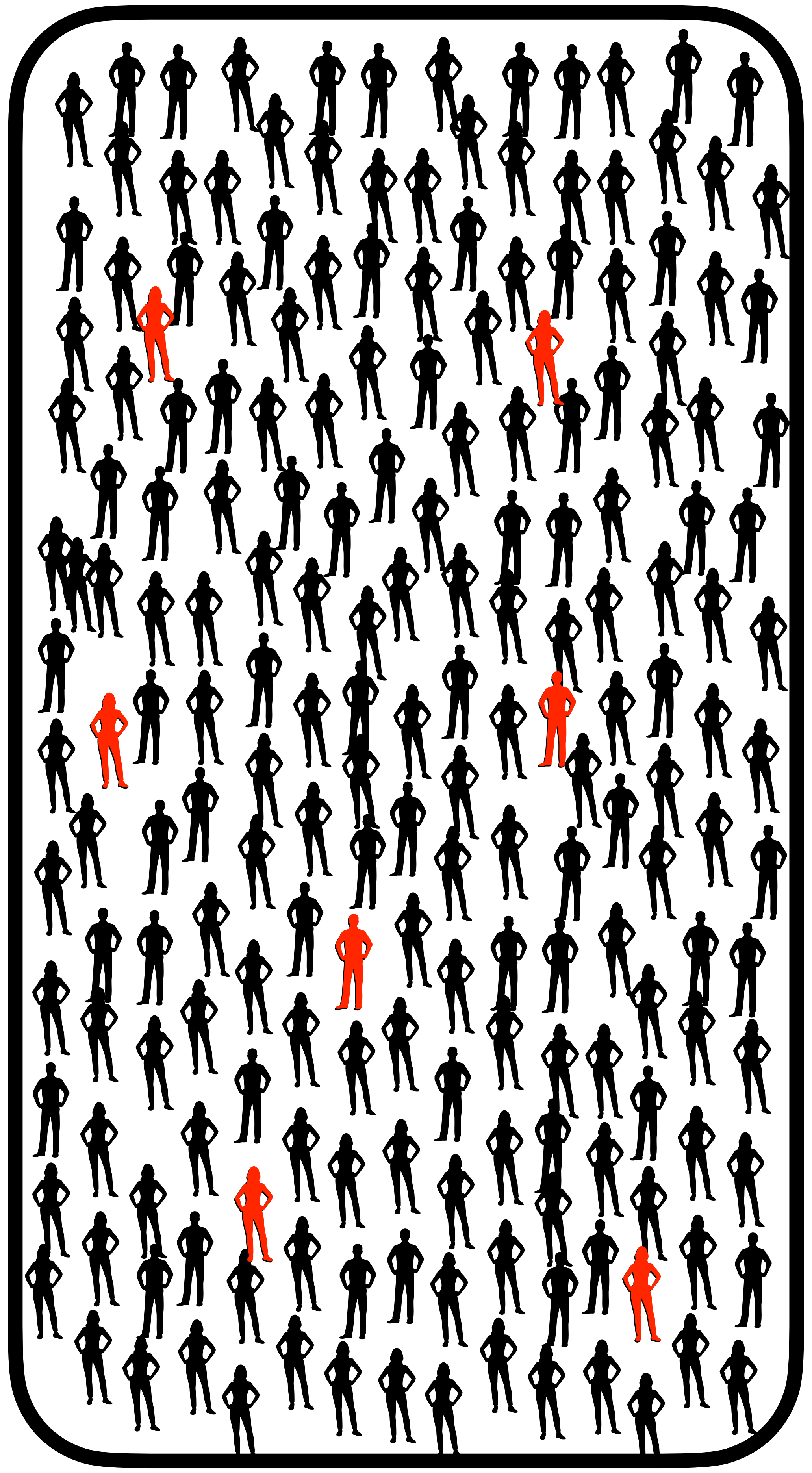


U

Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß,

Aufgabenstellung

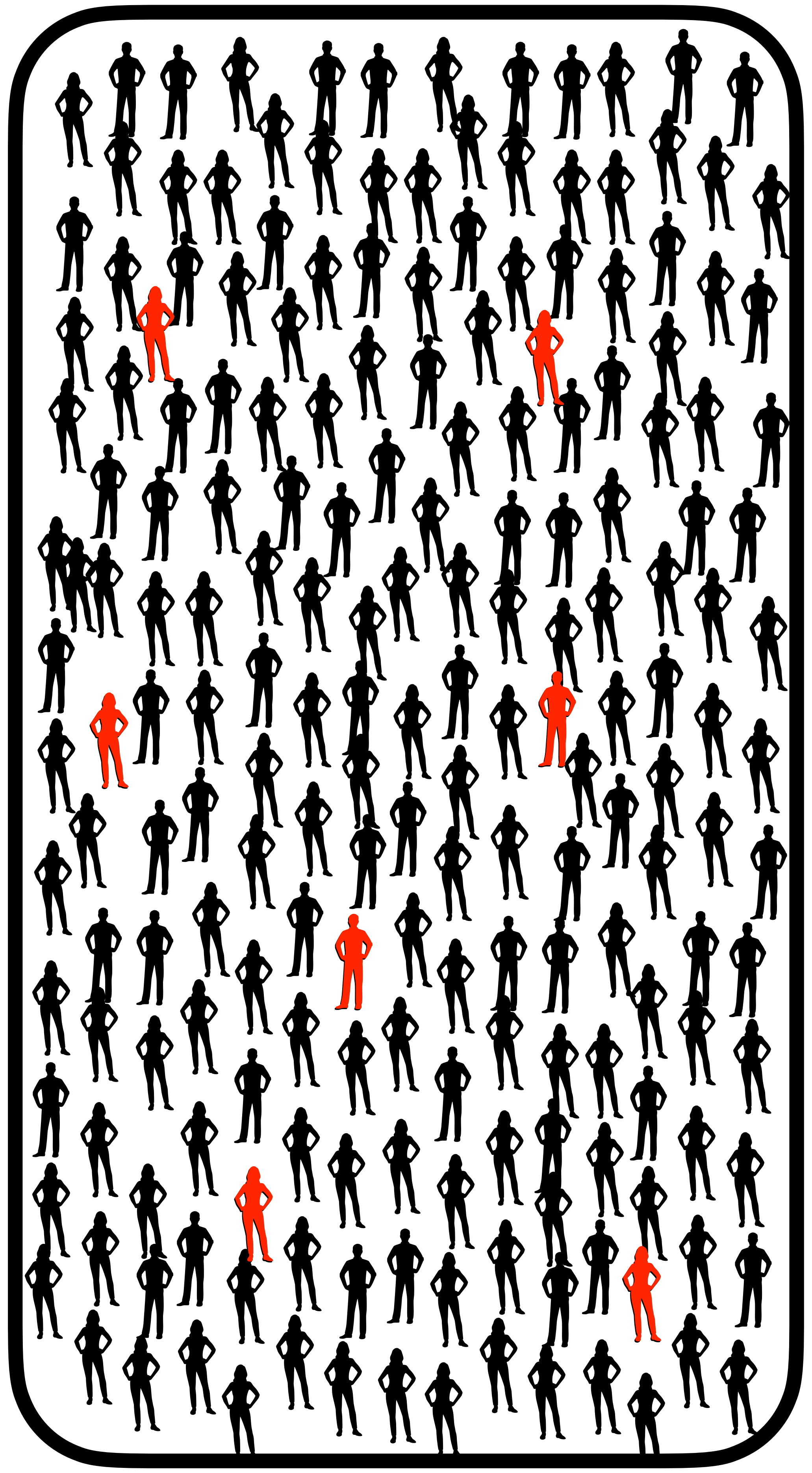


U S

Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)

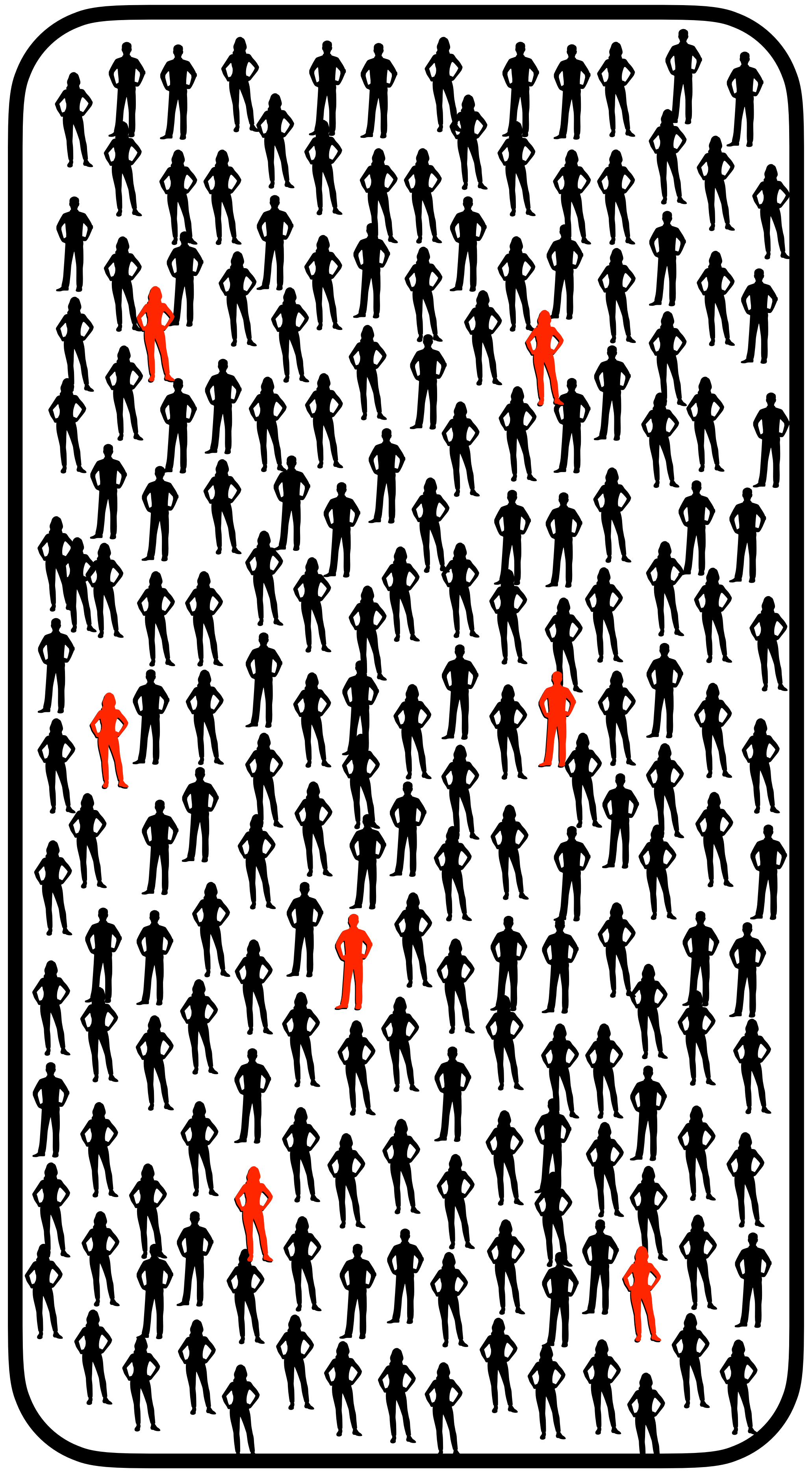
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert

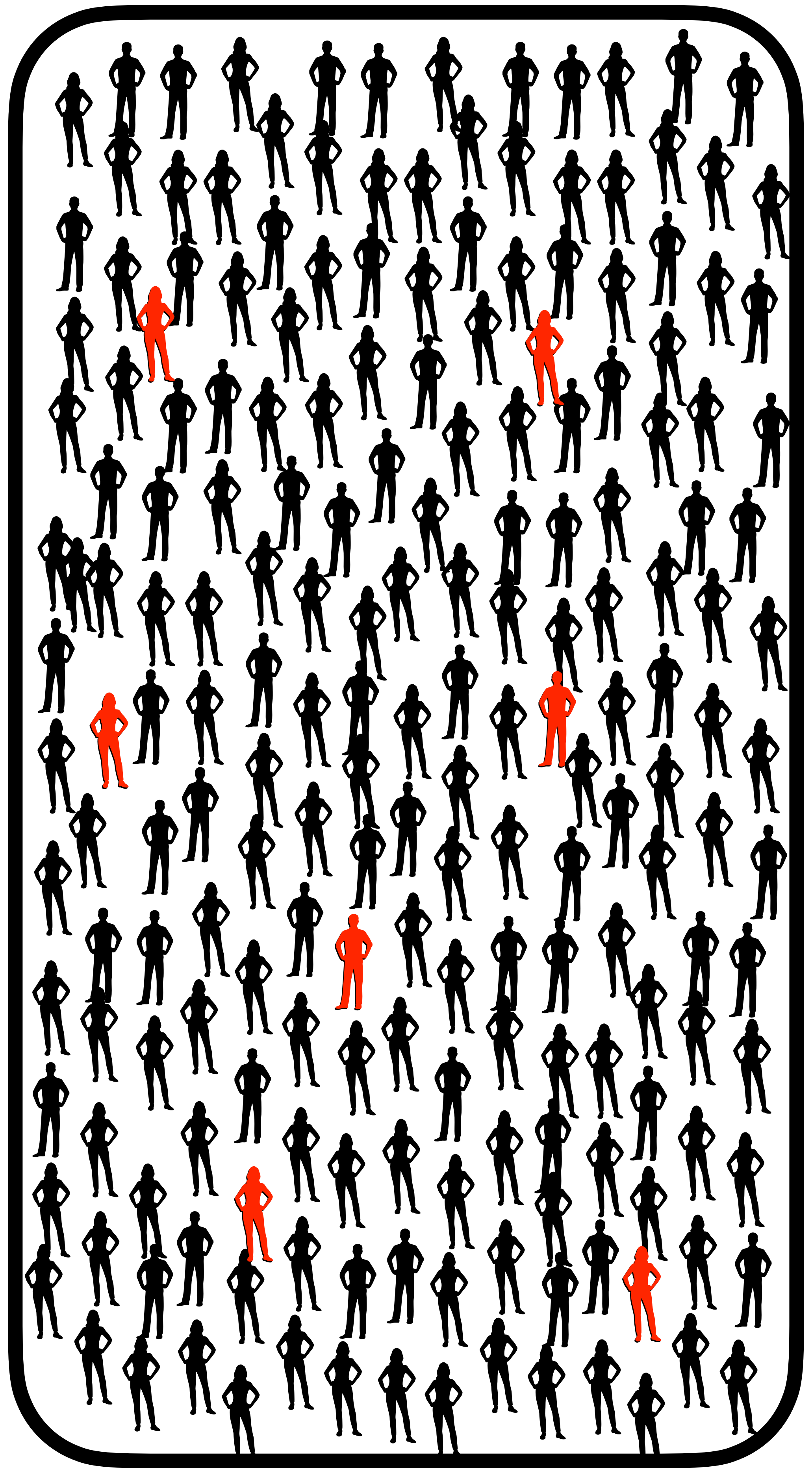
Aufgabenstellung

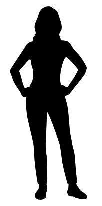


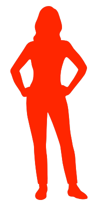
Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung



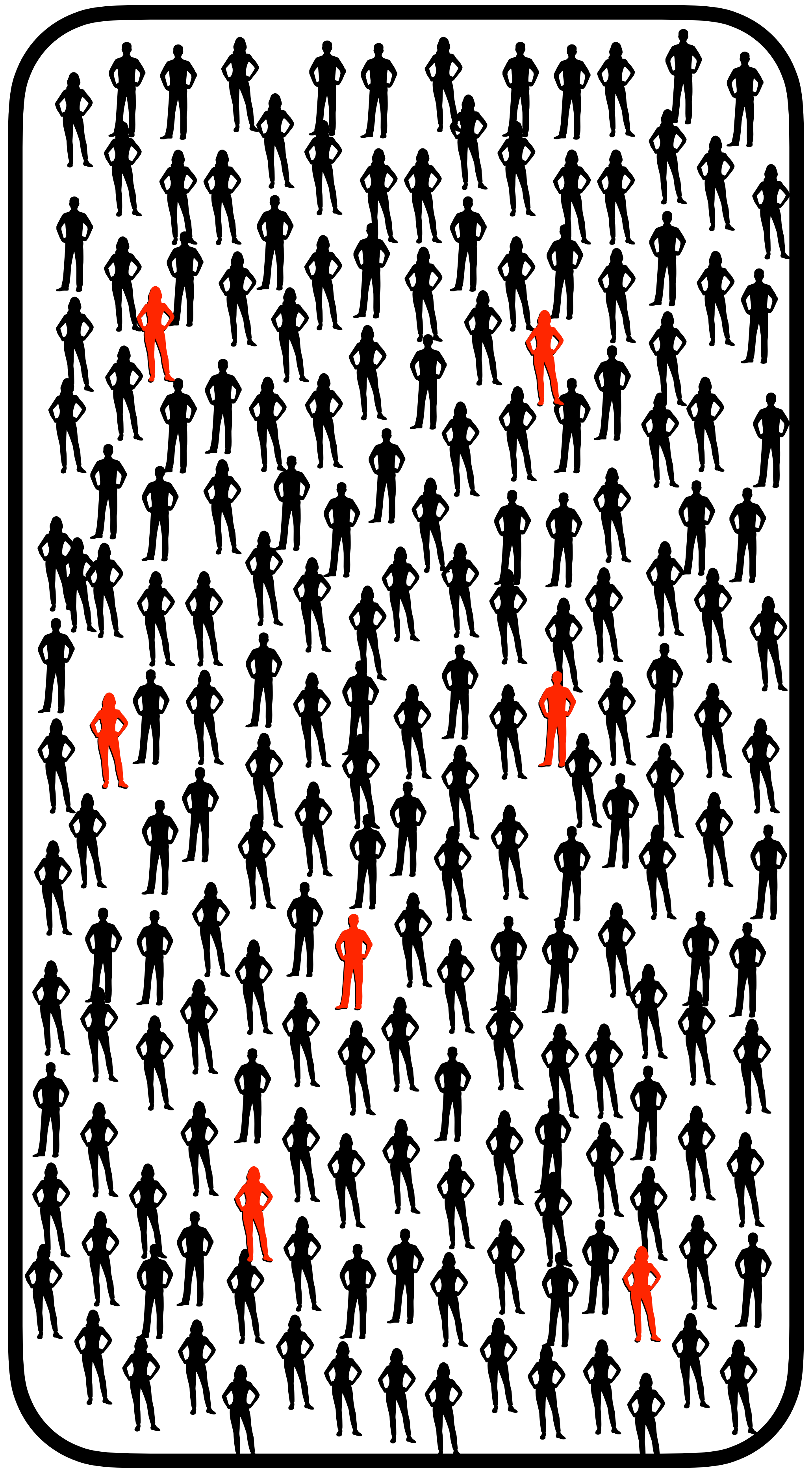
 U

 S

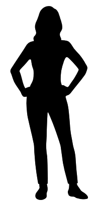
Hashing

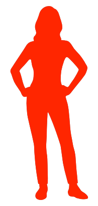
- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung



T

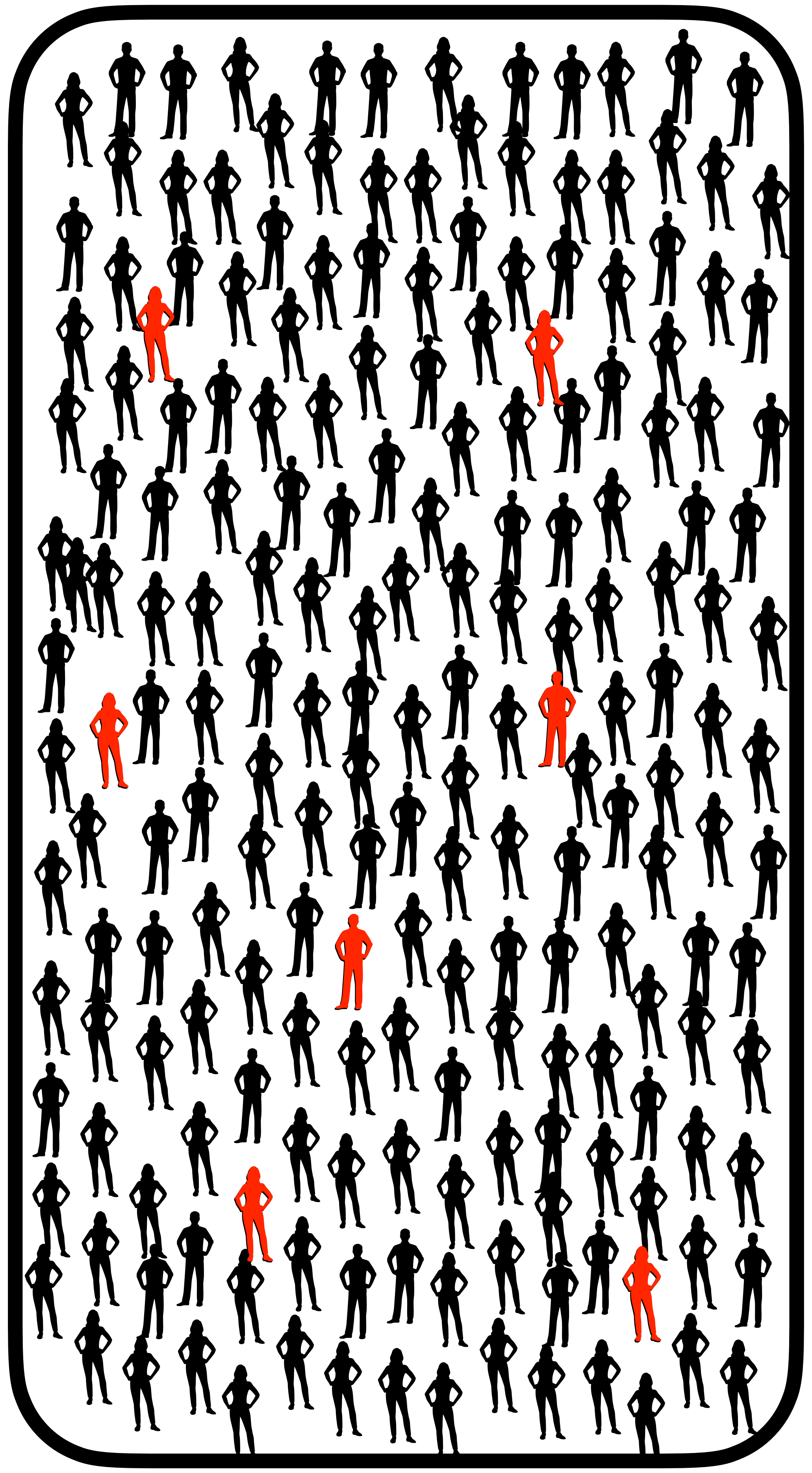
 U

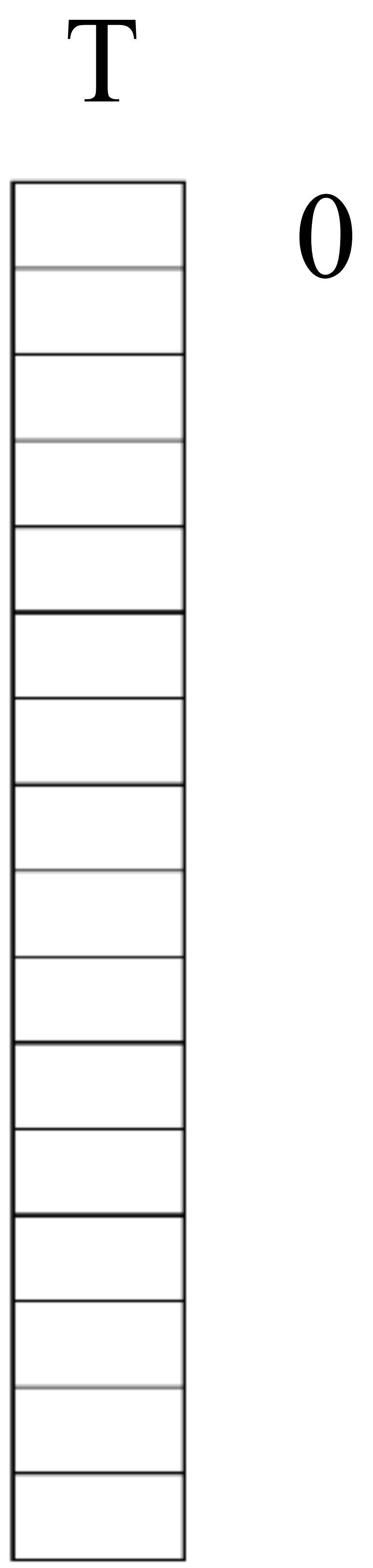
 S

Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung

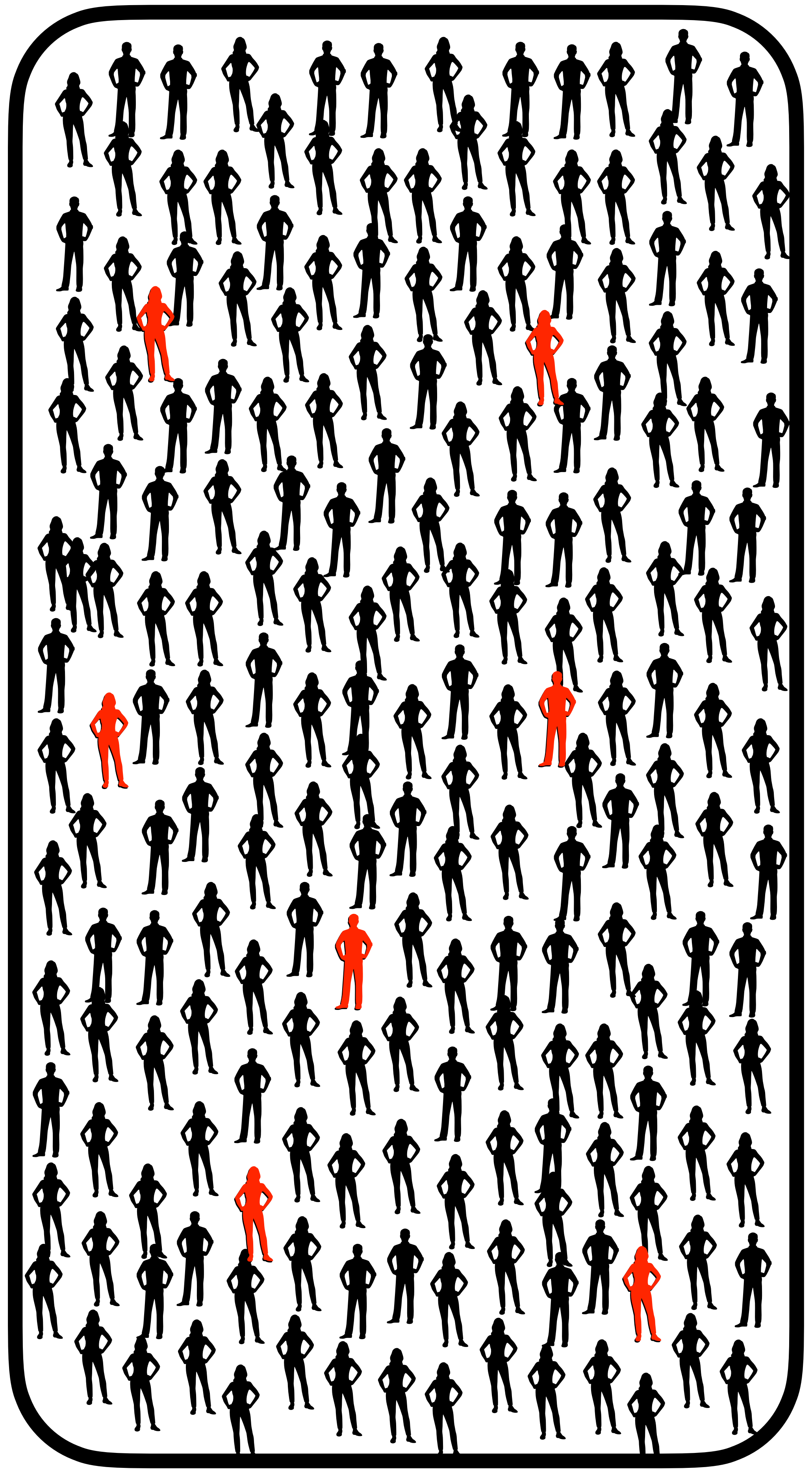


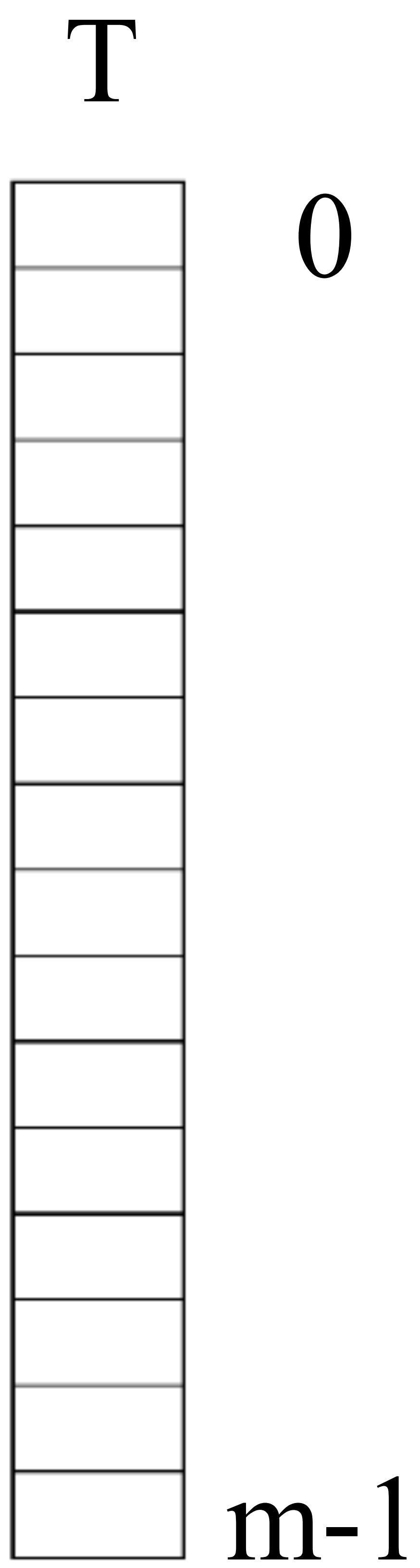


Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung

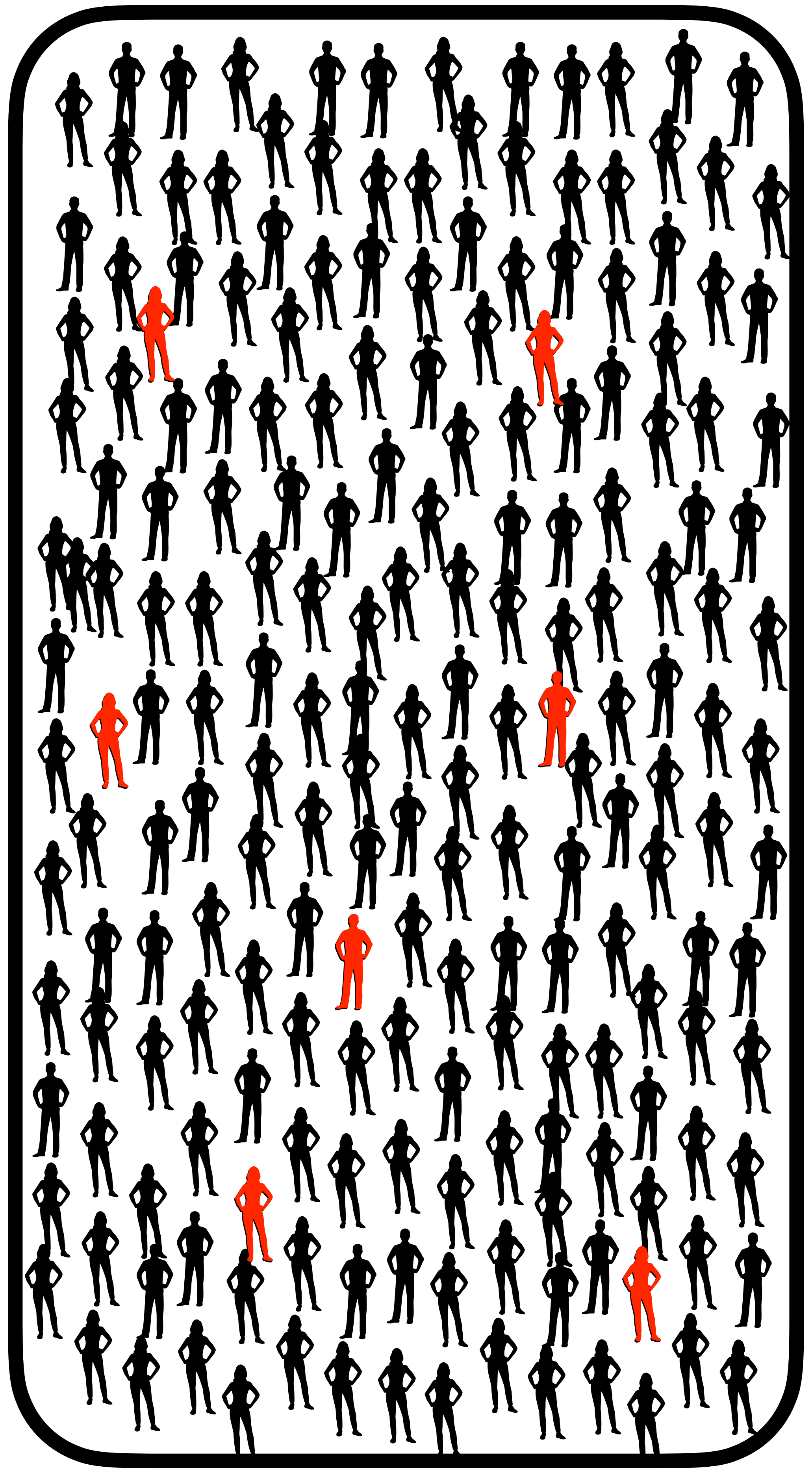


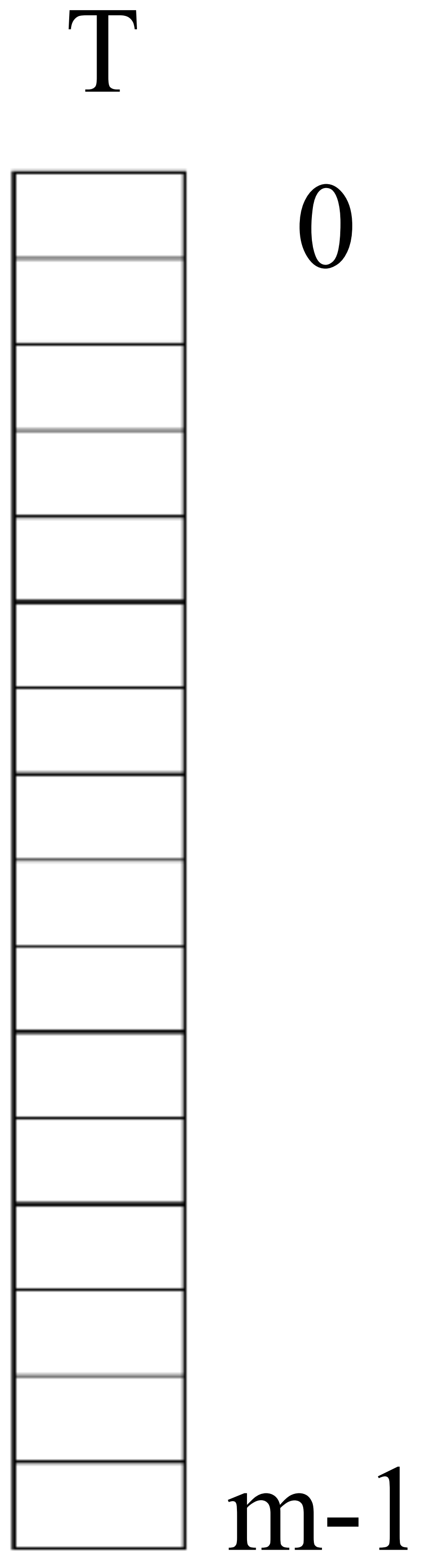


Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung

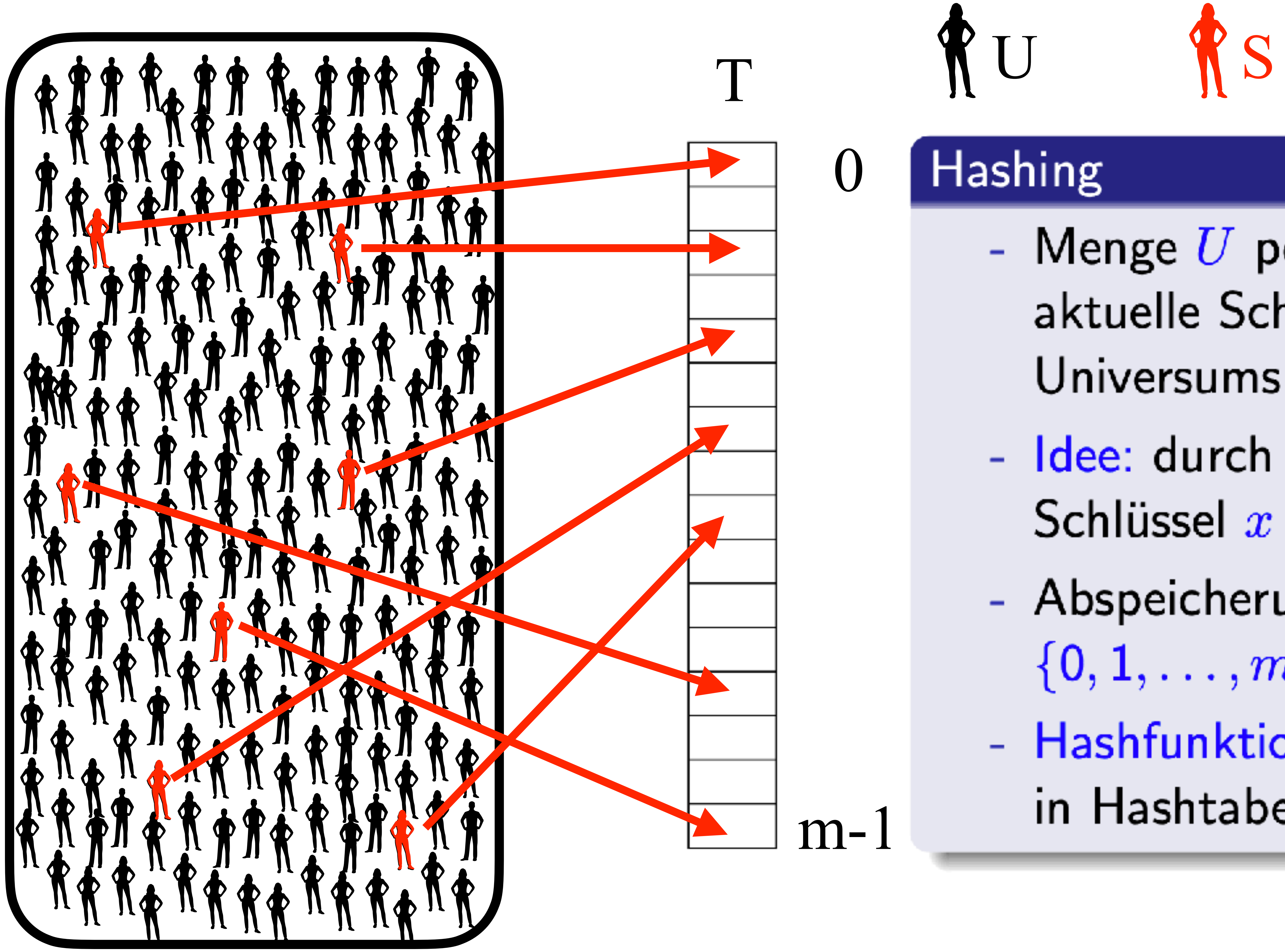




Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle
- Hashfunktion h liefert für jeden Schlüssel $x \in U$ eine Adresse in Hashtabelle, d.h. $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle
- Hashfunktion h liefert für jeden Schlüssel $x \in U$ eine Adresse in Hashtabelle, d.h. $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))
- Entfernen eines Datensatzes bei gegebenem Schlüssel x
  delete(x)

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))
- Entfernen eines Datensatzes bei gegebenem Schlüssel x
  delete(x)

Menge potentieller Schlüssel (Universum) kann sehr groß sein!

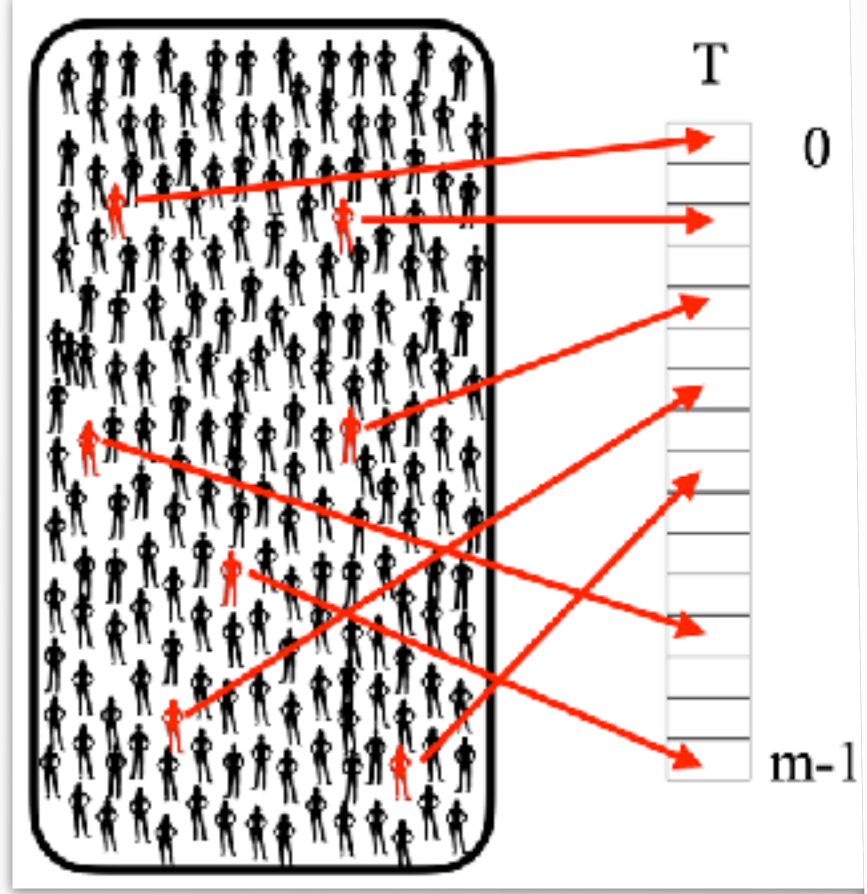
Herausforderungen

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

Herausforderungen

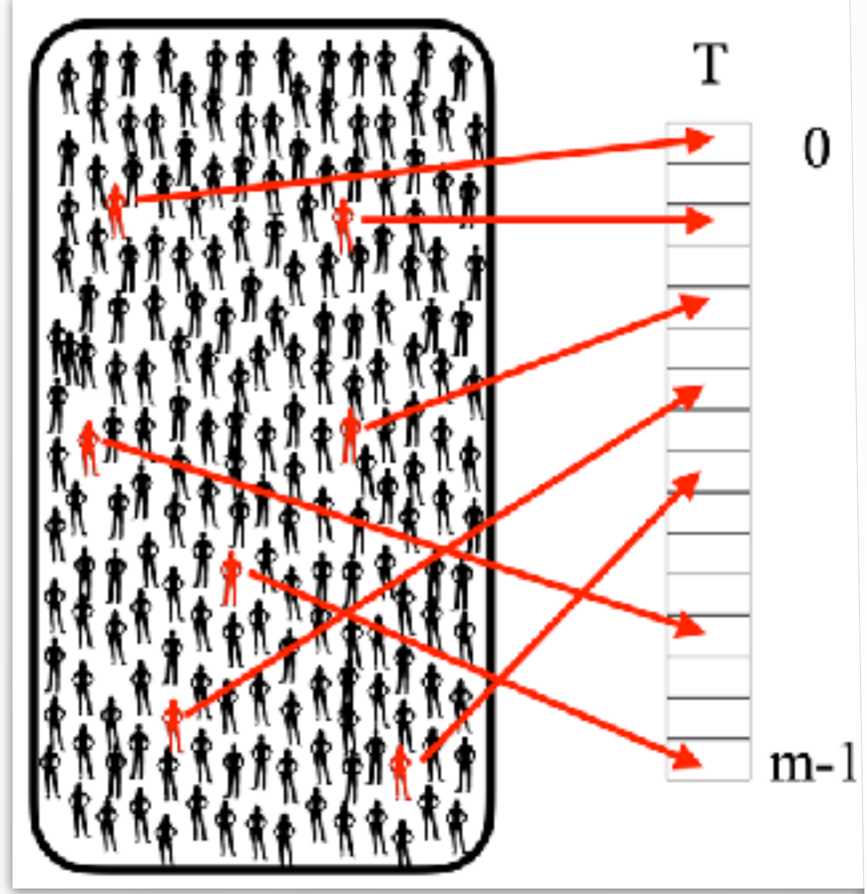
Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

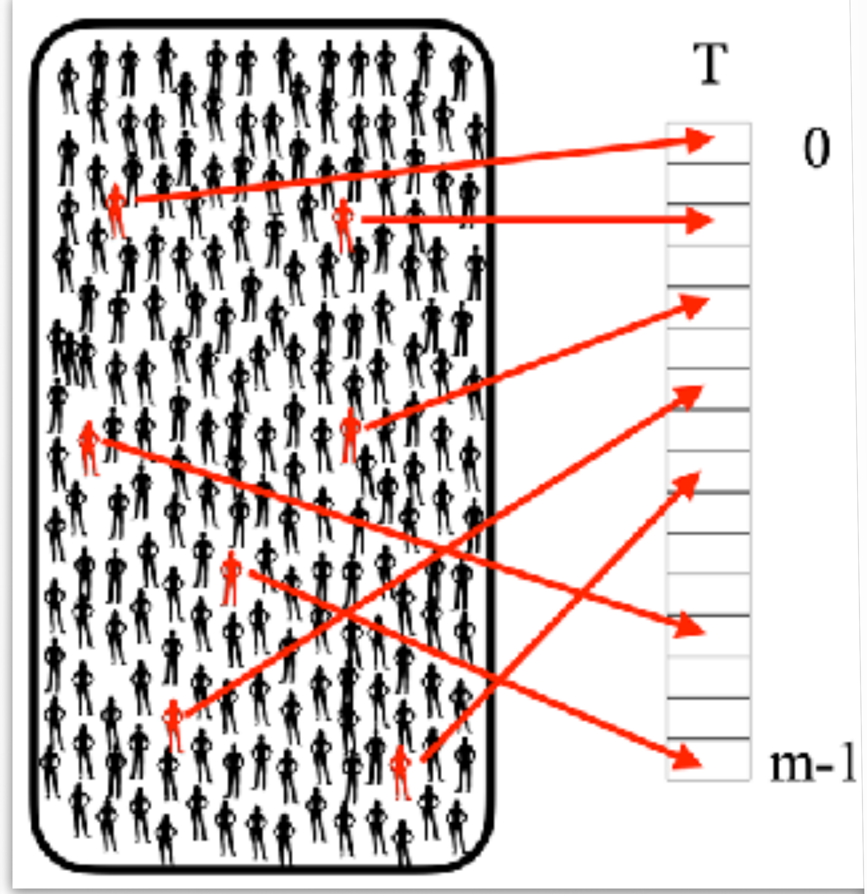
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

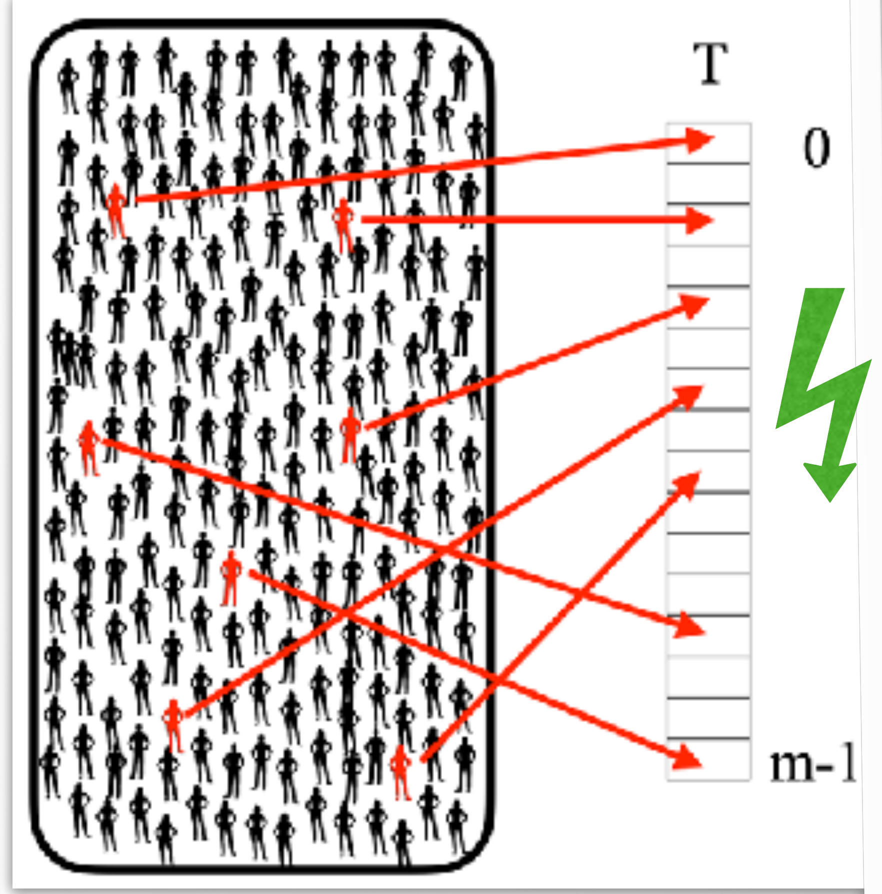
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\longrightarrow$ Adresskollision



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

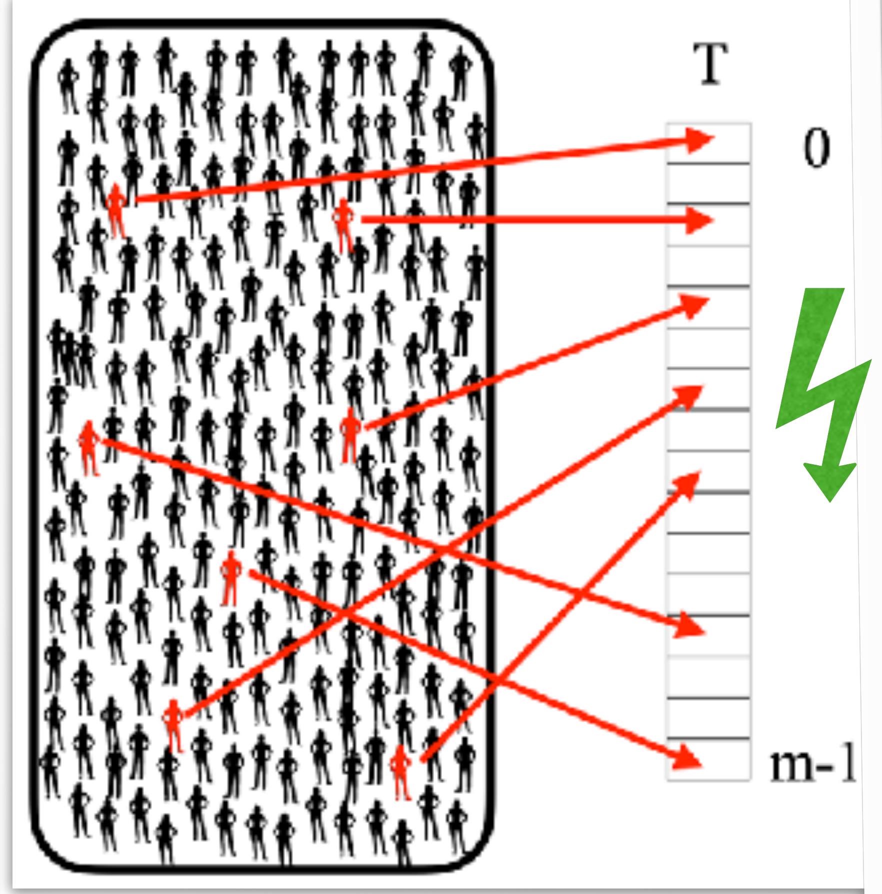
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\longrightarrow$ Adresskollision



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge $\longrightarrow$ Adresskollision

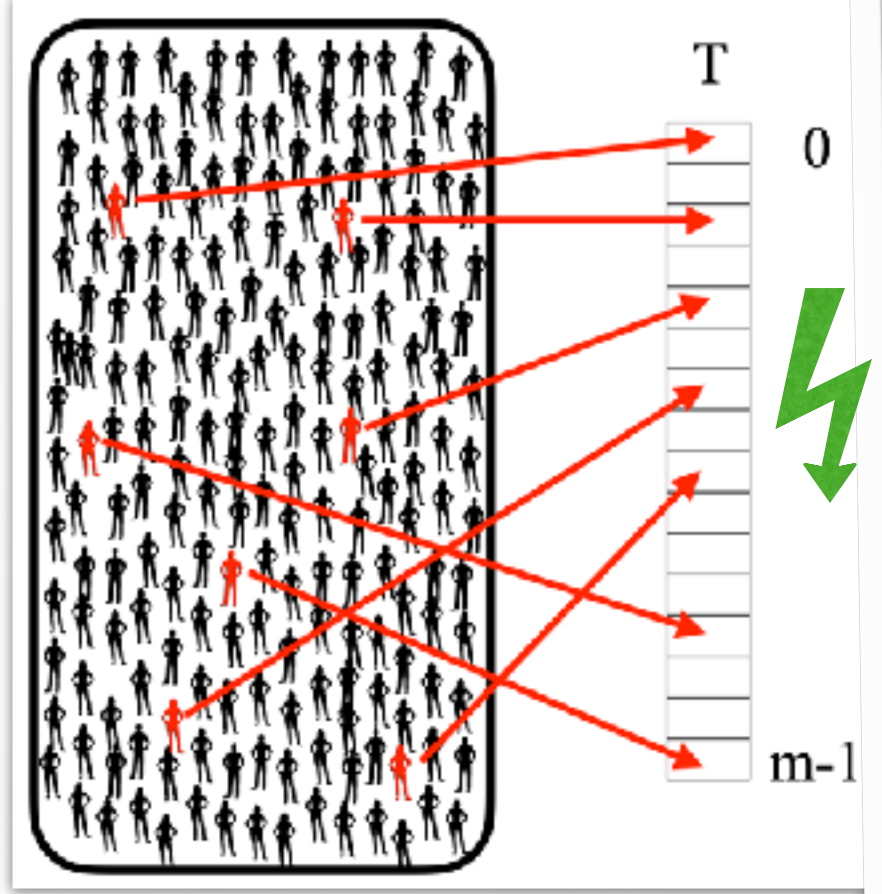


Hashverfahren gegeben durch:

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\longrightarrow$ Adresskollision



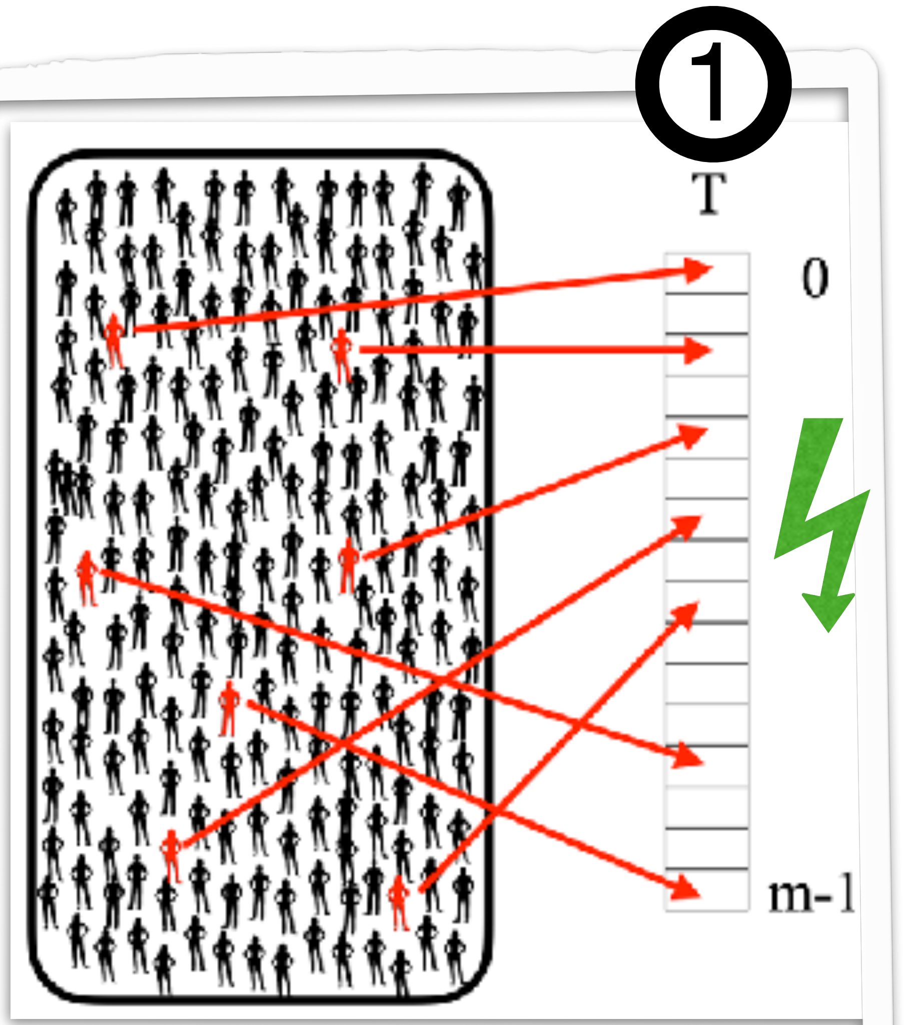
Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge $\longrightarrow$ Adresskollision



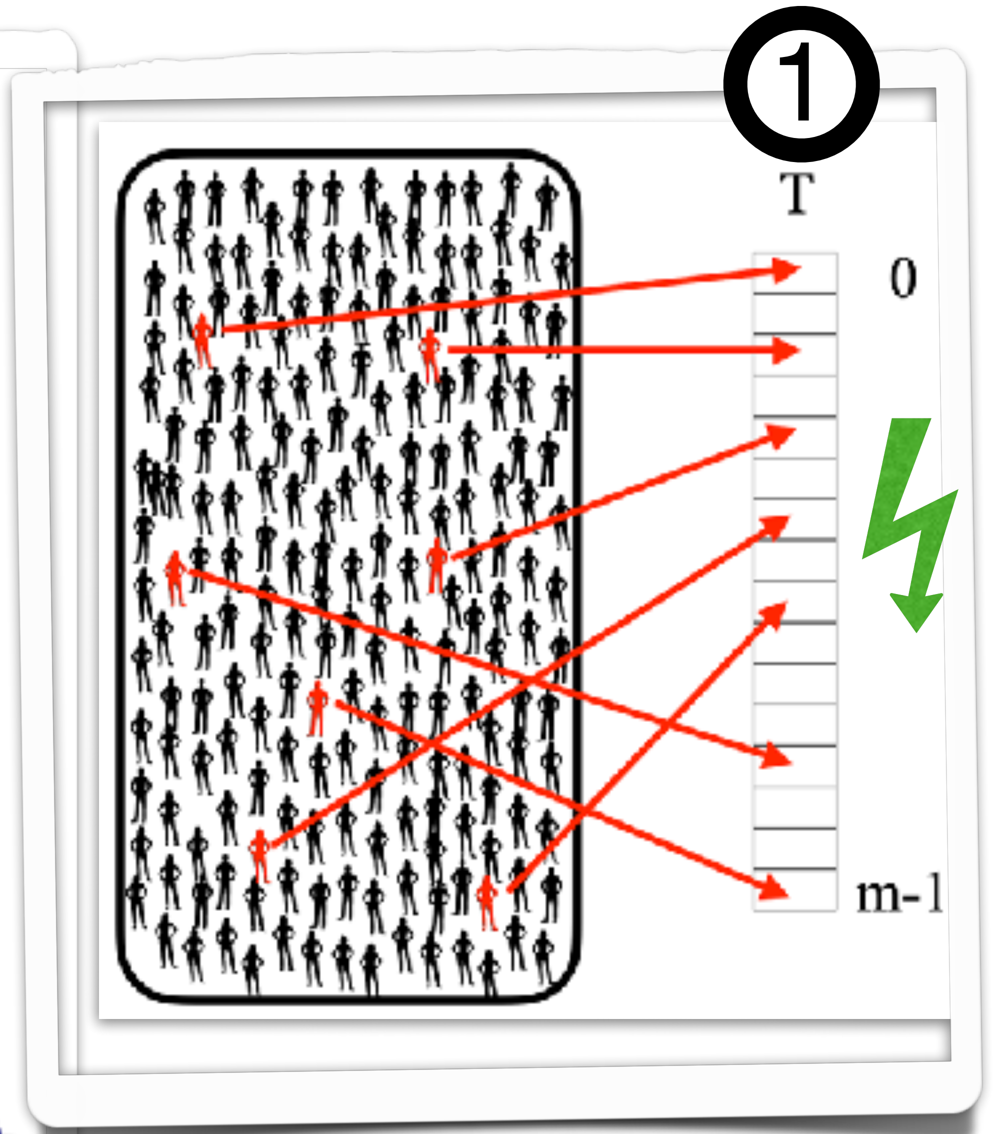
Hashverfahren gegeben durch:

1 eine Hashtabelle,

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge $\longrightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

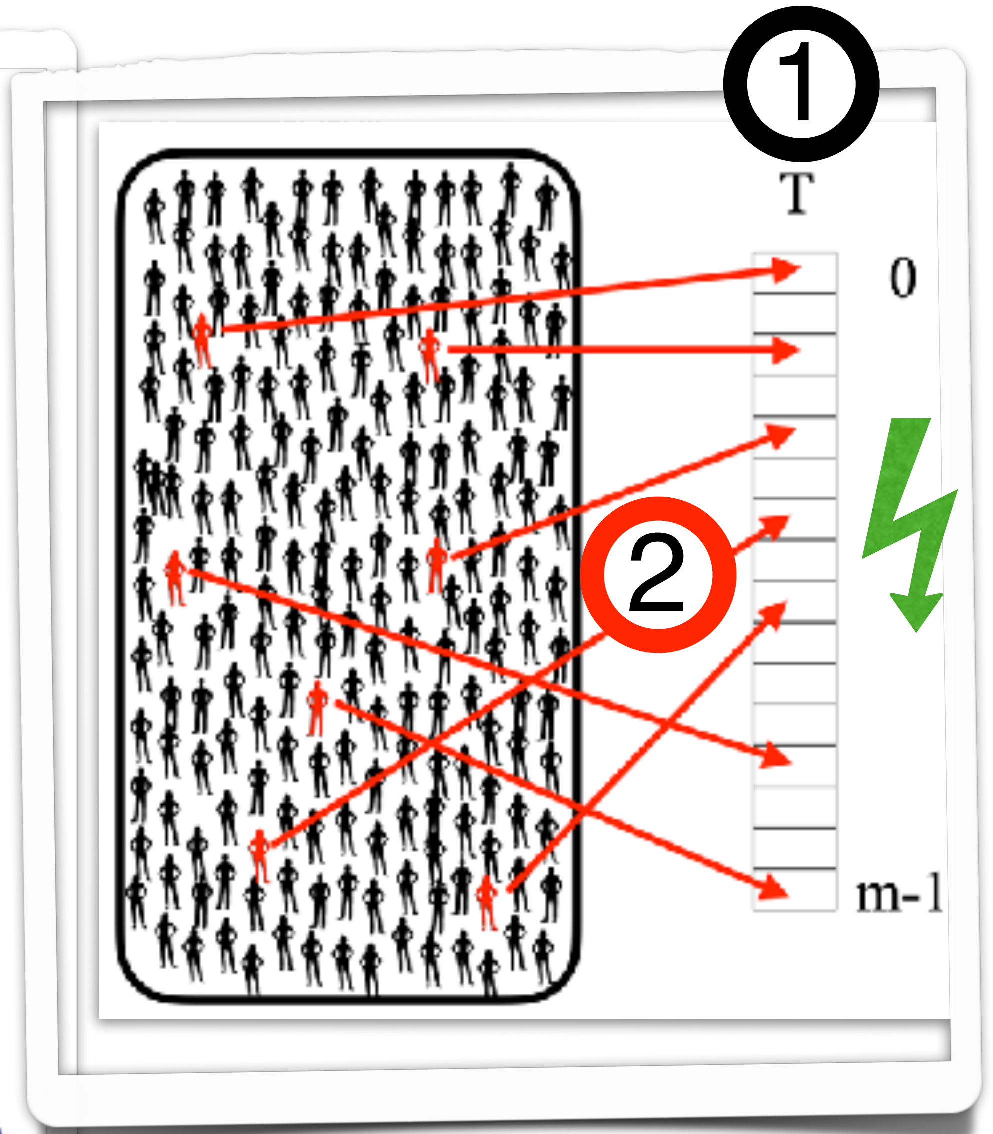
1 eine Hashtabelle,

2 eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\longrightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

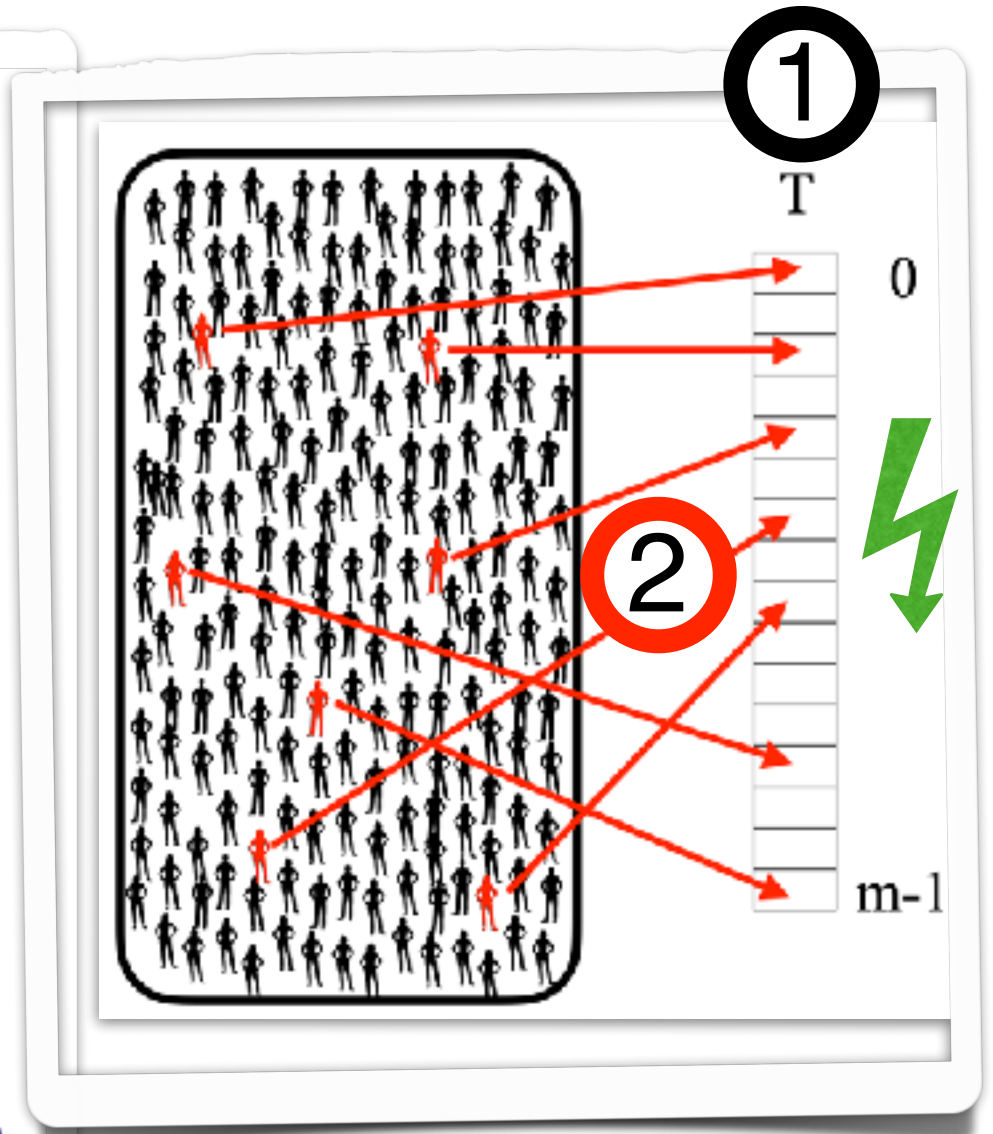
1 eine Hashtabelle,

2 eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge $\longrightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

1 eine Hashtabelle,

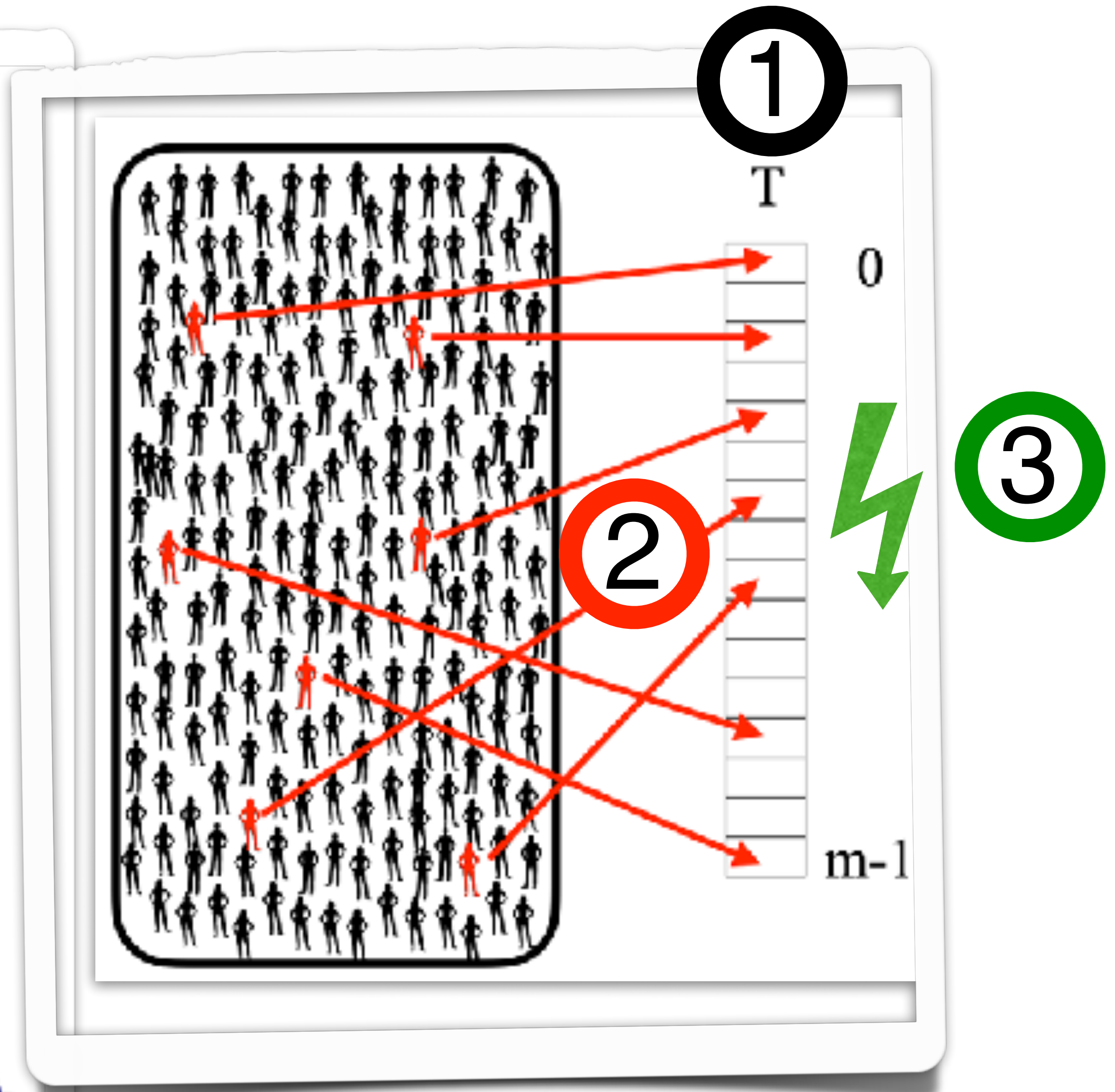
2 eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,

3 eine Strategie zur Auflösung möglicher Adresskollisionen.

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also
$|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\longrightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

1 eine Hashtabelle,

2 eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,

3 eine Strategie zur Auflösung möglicher Adresskollisionen.

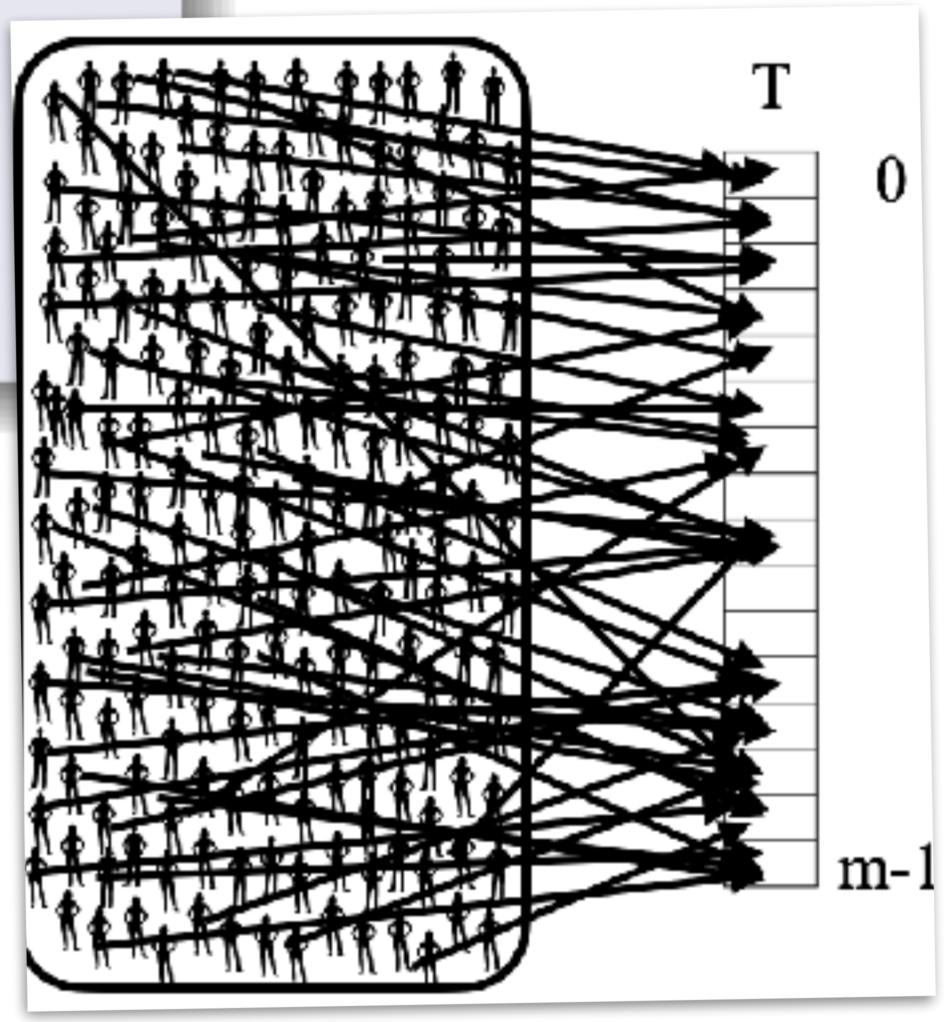
Anforderungen

Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

Anforderungen

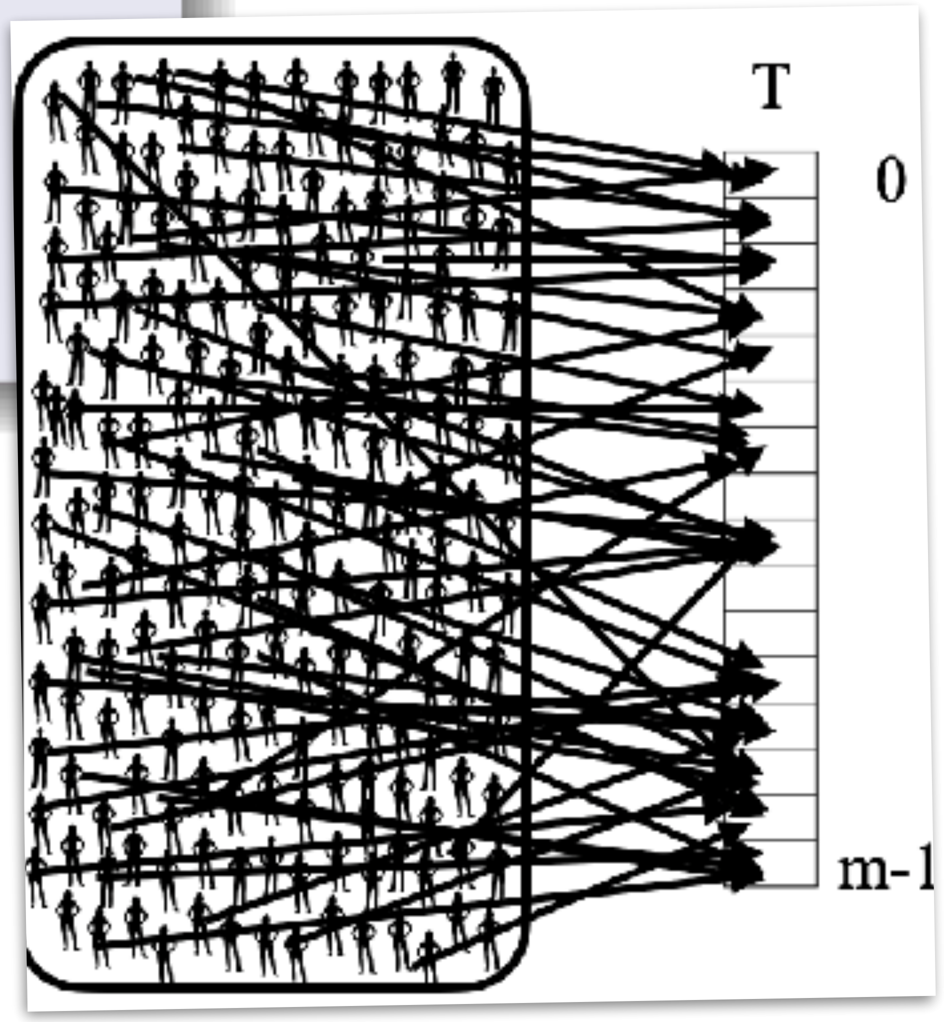
Gute Hashfunktionen sollten:



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

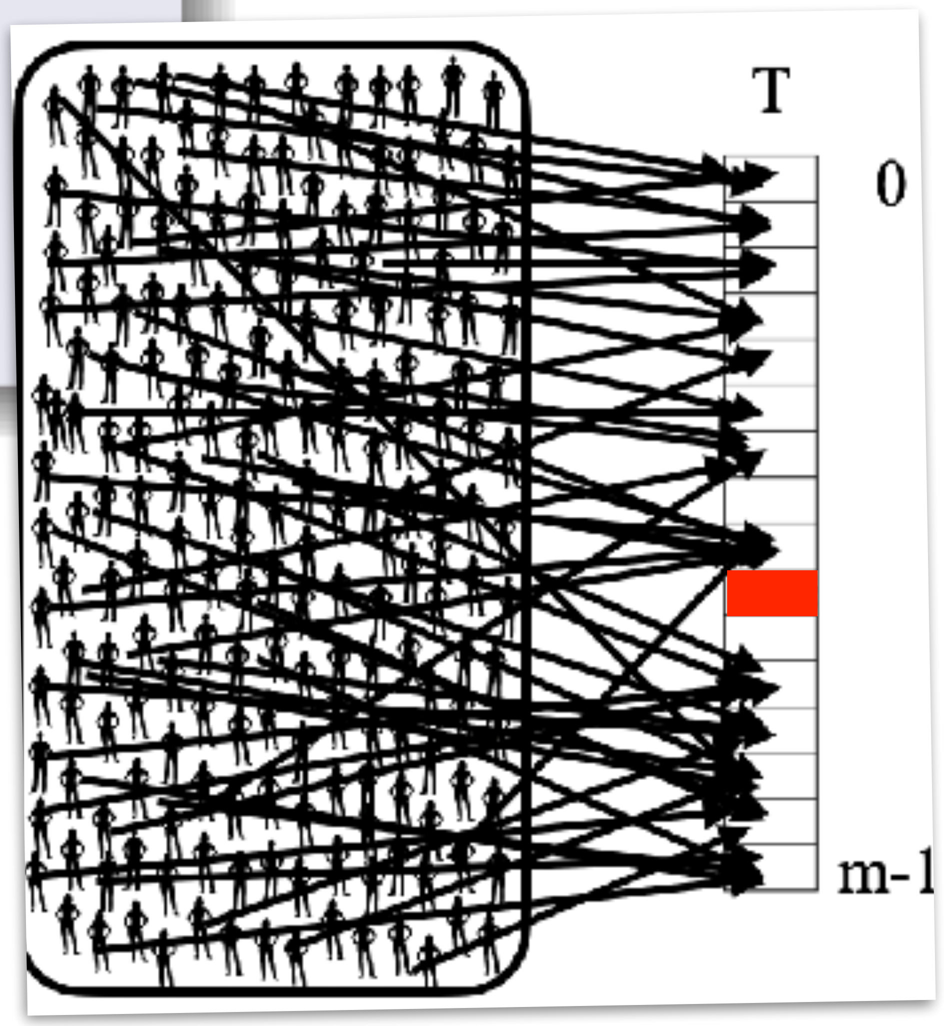
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

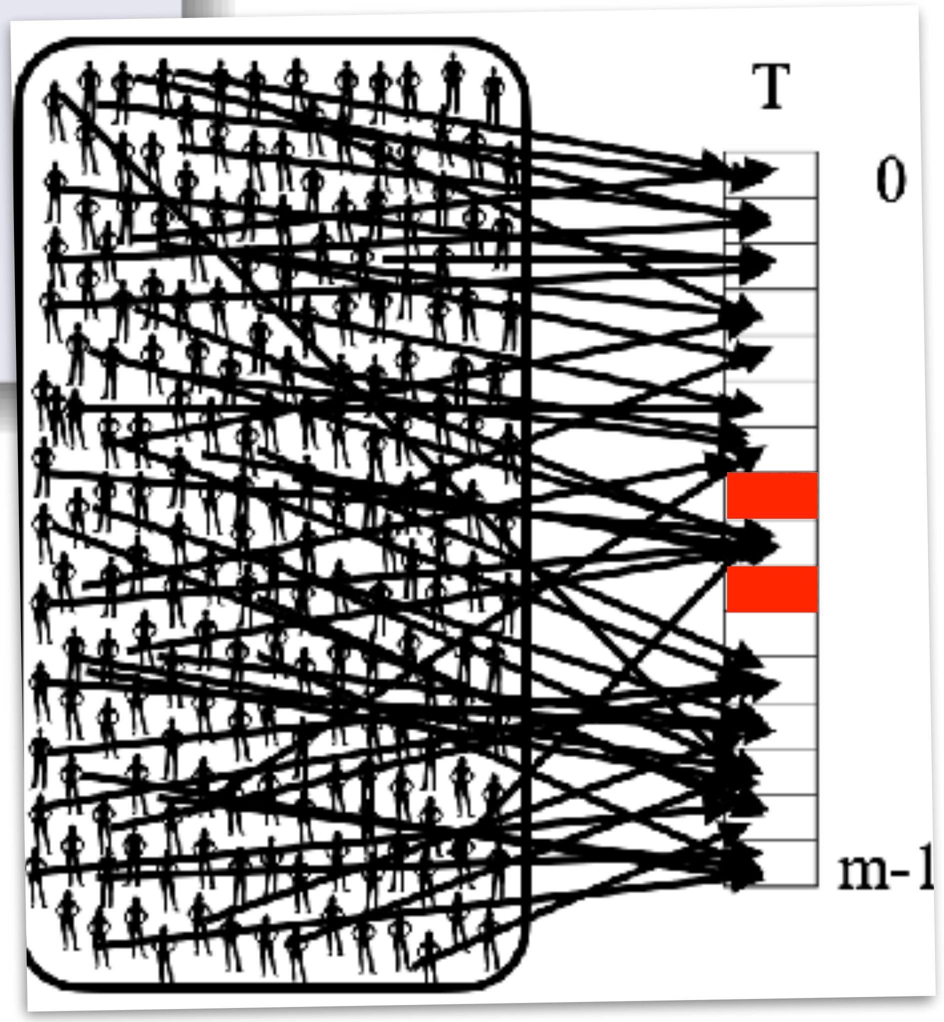
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

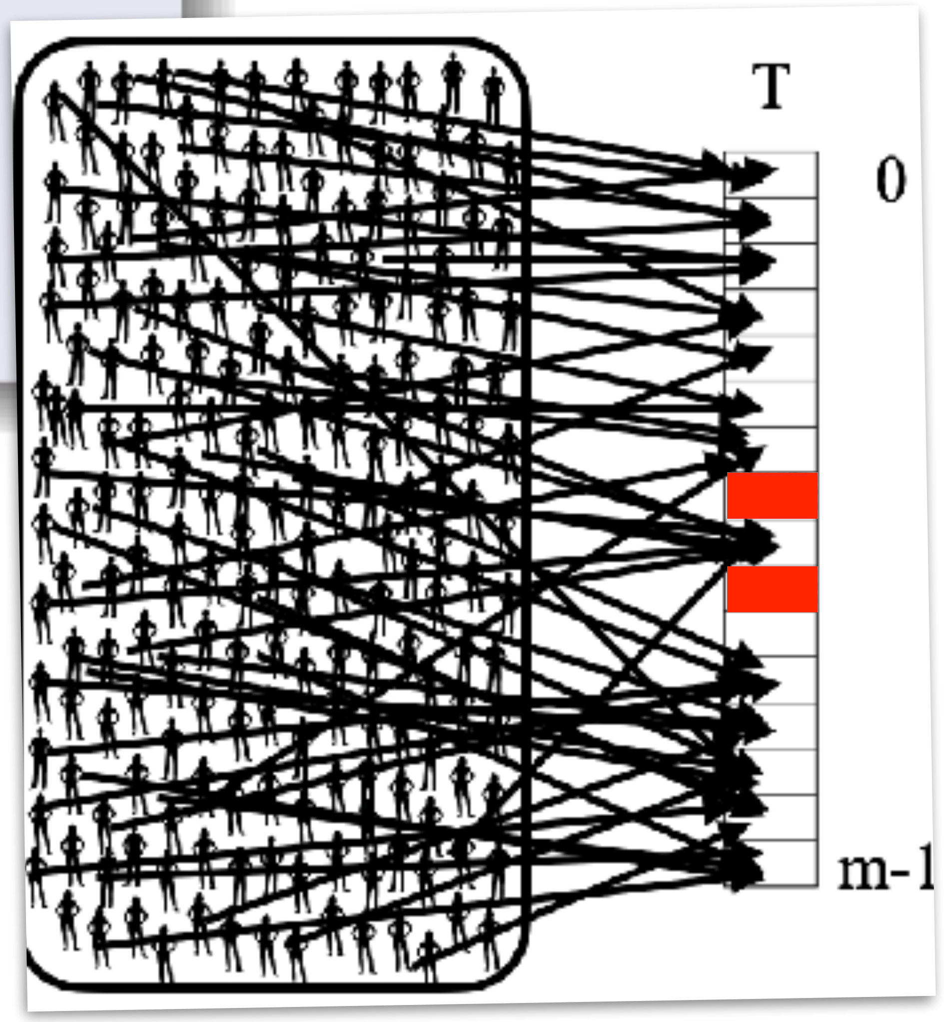
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

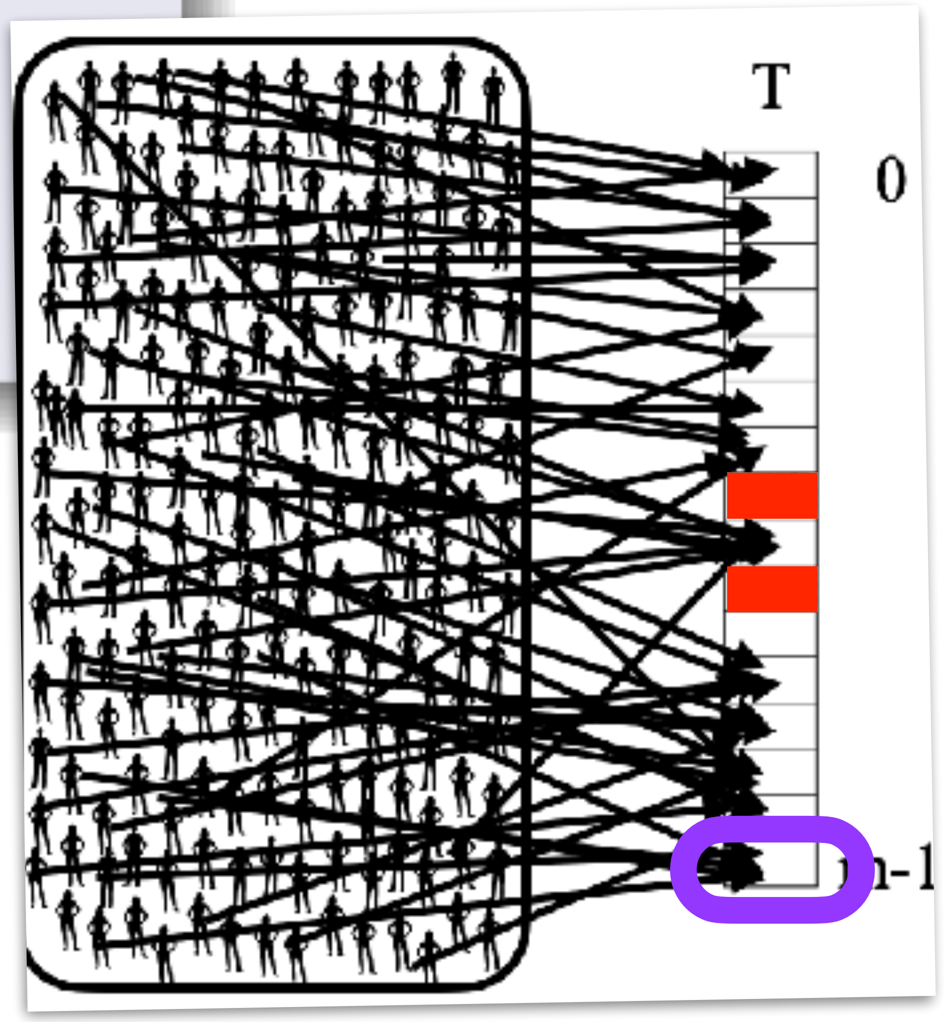
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

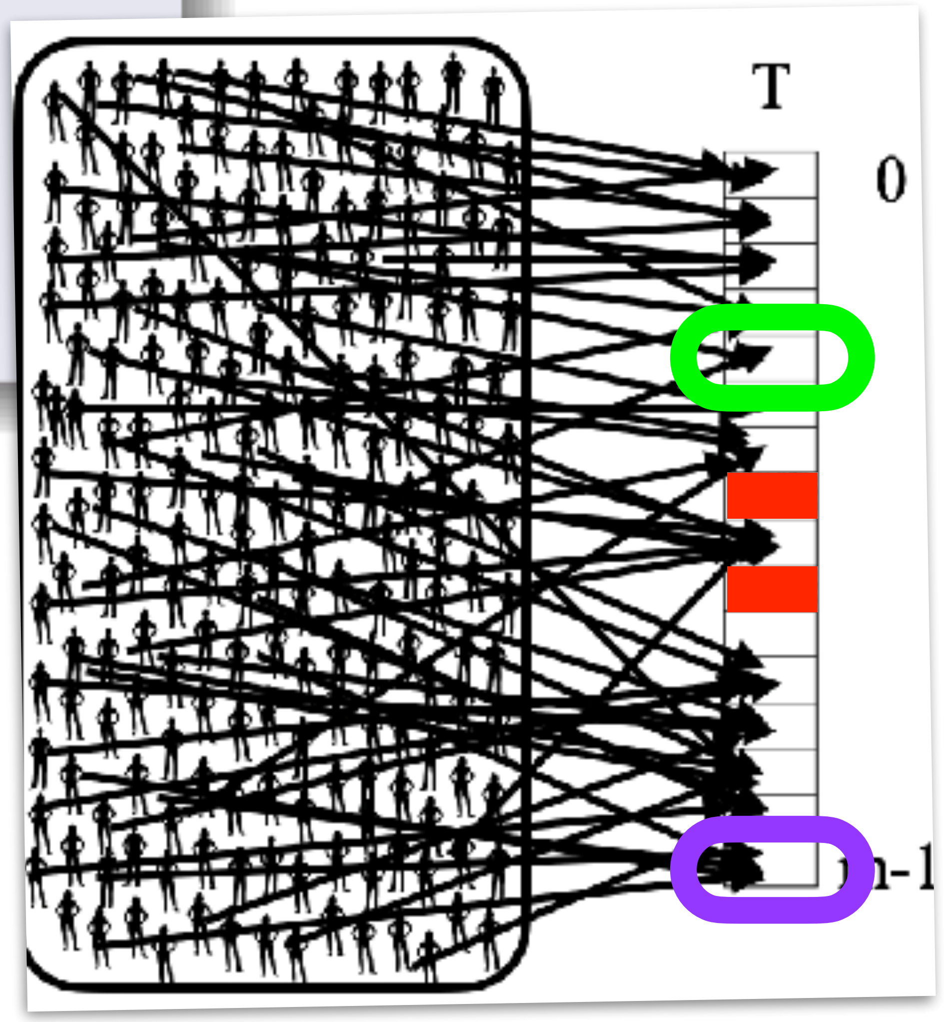
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

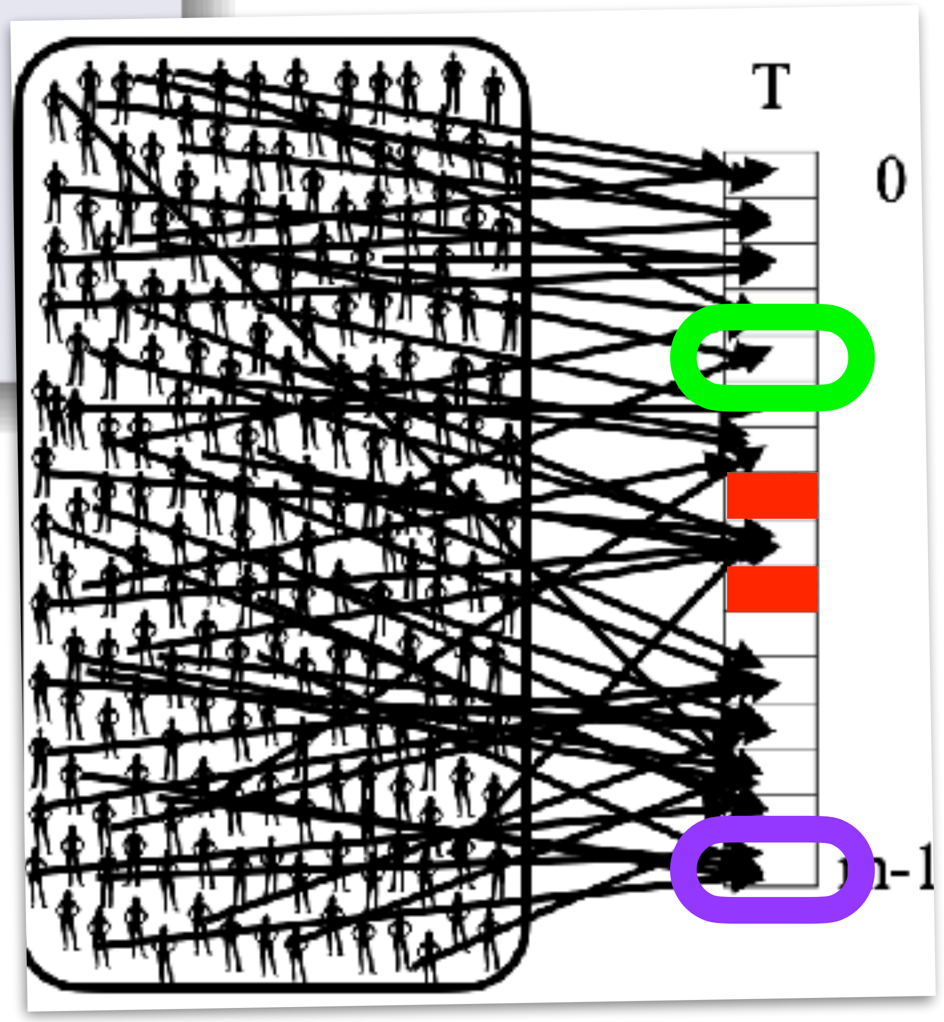
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,
- effizient berechenbar sein.



7.3 Hashfunktionen

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) =\ \ 5$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = \;\; 5$

$h(22) = \;\; 0$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:
$h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$
$h(34) = 1$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$
$h(34) = 1$
$h(13) = 2$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:
$$\begin{aligned} h(49) &= 5 \\ h(22) &= 0 \\ h(6) &= 6 \\ h(52) &= 8 \\ h(76) &= 10 \\ h(34) &= 1 \\ h(13) &= 2 \\ h(29) &= 7 \end{aligned}$$

7.4 Kollisionen

Geburtstagsparadoxon

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) $= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \dots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Prob(23 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.49

Prob(50 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.03

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

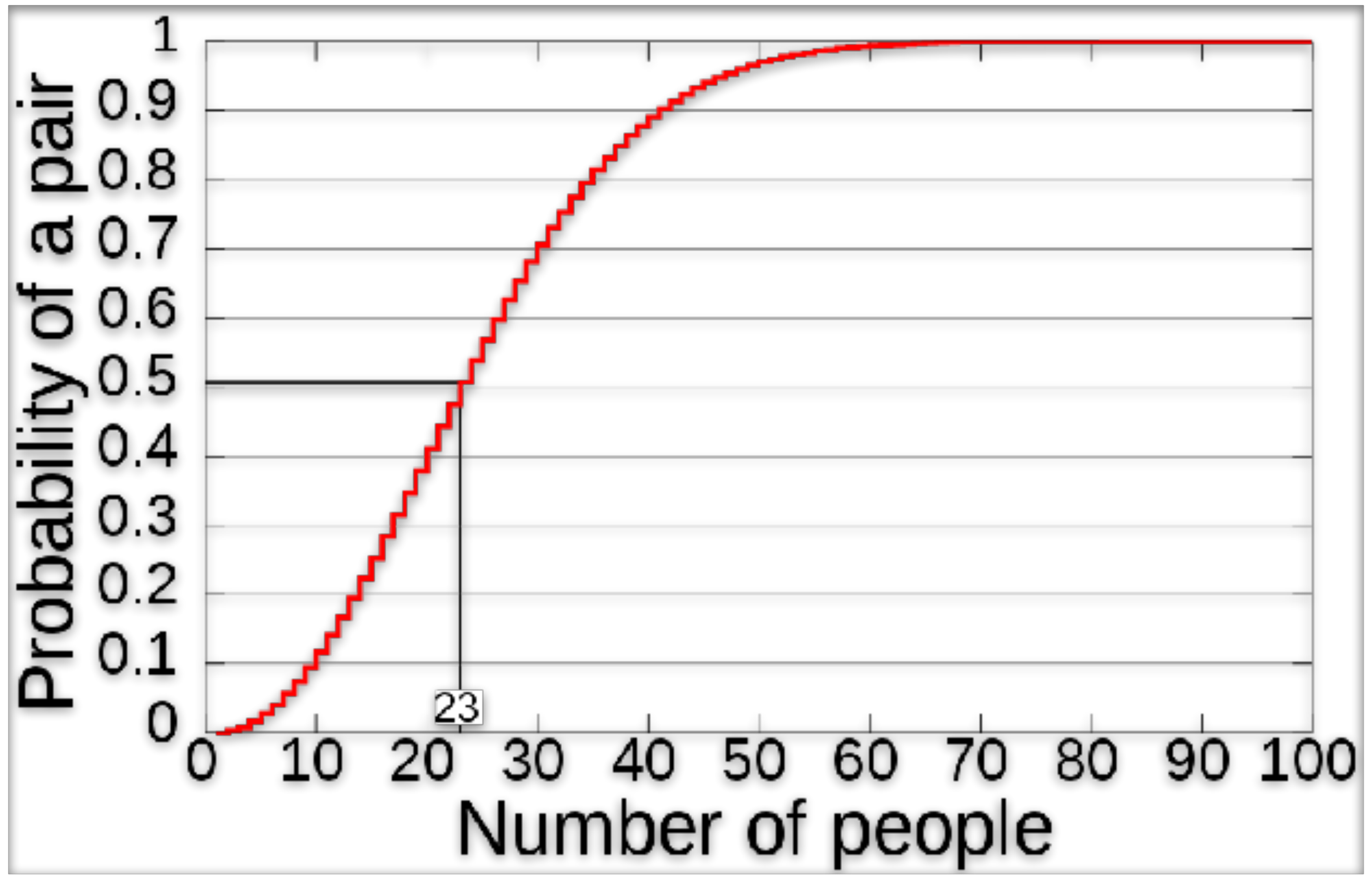
Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) $= \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Prob(23 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.49

Prob(50 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.03



Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

$$\text{Prob}(2m^{1/2} \text{ Daten kollisionsfrei}) =$$

$$\underbrace{\frac{m-1}{m} \cdots}_{\le\ 1} \; \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{\left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}}$$

$$\le \quad 1 \quad \cdot \quad \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

$$\text{Prob}(2m^{1/2} \text{ Daten kollisionsfrei}) =$$

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}}_{\leq\; 1} \cdots \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{\cdot \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}}$$

$$\leq 1 \cdot \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

$\text{Prob}(2m^{1/2} \text{ Daten kollisionsfrei}) =$

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}\cdots}\ \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m}\cdots\frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot \quad \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}} \approx \frac{1}{e}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) $=$

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}\cdots}_{\leq 1}\;\cdot\;\underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m}\cdots\frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{\left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}}$$

$$\leq 1 \cdot \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}} \approx \frac{1}{e}$$

Hashing muss mit Kollisionen leben und benötigt Strategien zur Kollisionsbehandlung!

Kollisionbehandlung

Kollisionbehandlung

Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

Kollisionbehandlung

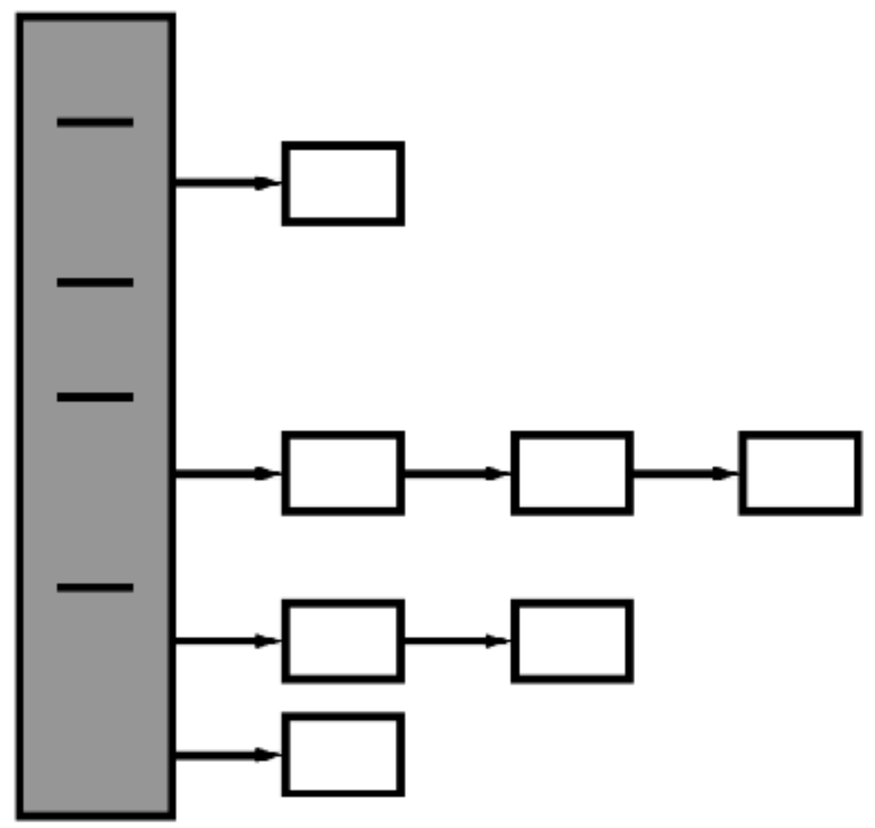
Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

- mittels verketteter Listen (links)

Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

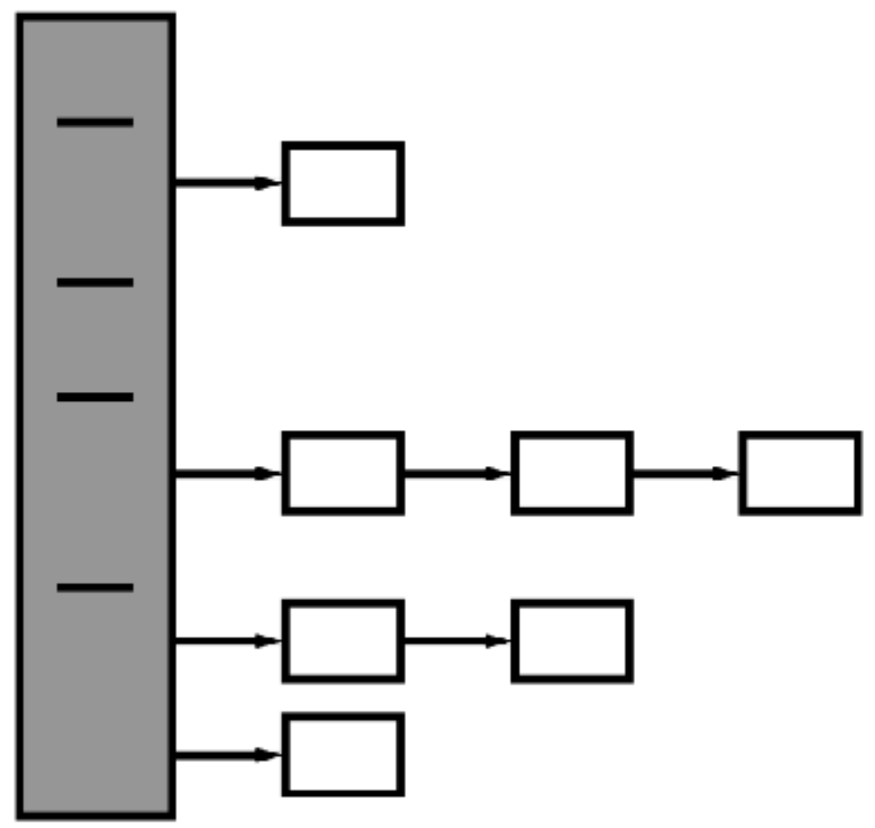
- mittels verketteter Listen (links)



Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

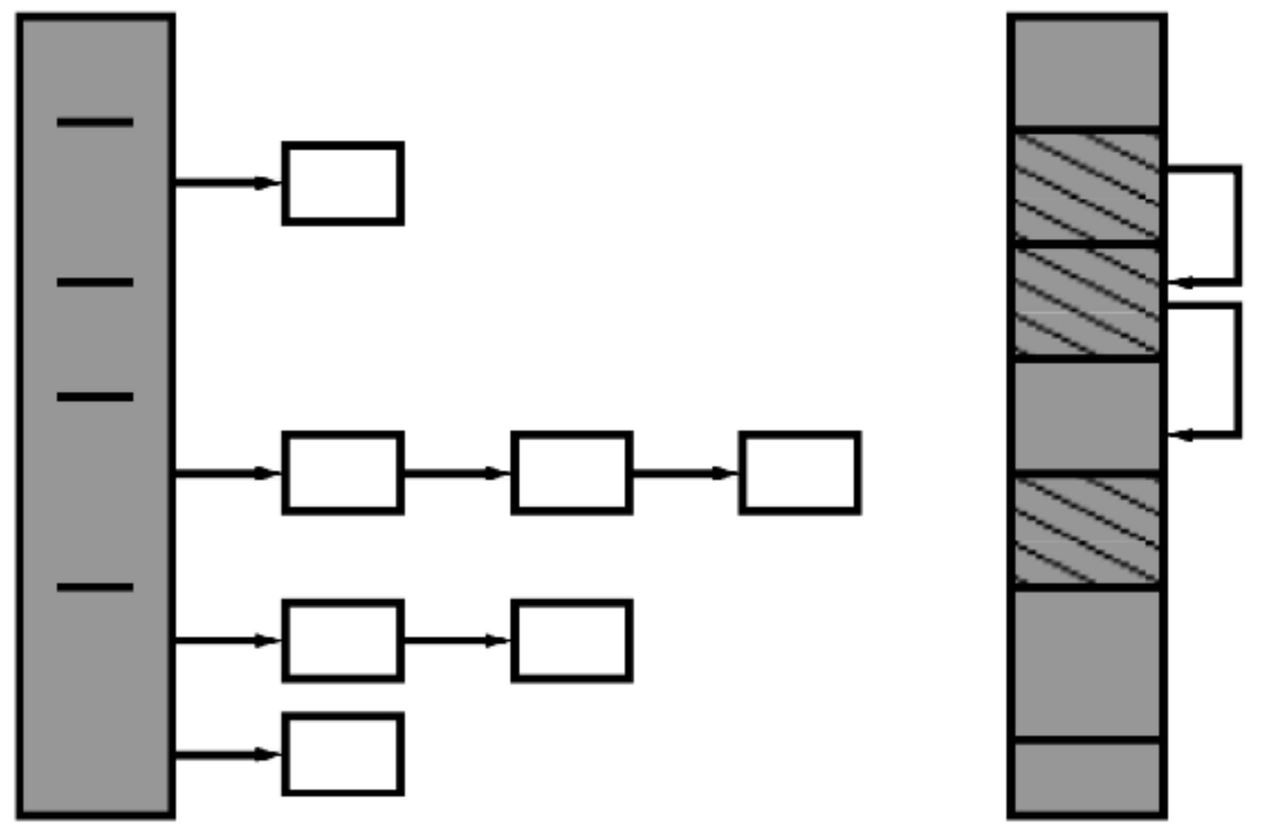
- mittels verketteter Listen (links)
- mittels offener Adressierung (rechts)



Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

- mittels verketteter Listen (links)
- mittels offener Adressierung (rechts)



7.5 Verkettung von Überläufern

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$

$\rightarrow \text{E}(X_{ij}) = 1 \cdot \frac{1}{m} + 0 \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$

$X_j = X_{1j} + \cdots + X_{nj}$ zählt Anzahl Daten in Liste $L(j)$.

$\text{E}(X_j) = \text{E}(X_{1j} + \cdots + X_{nj}) = \text{E}(X_{1j}) + \cdots + \text{E}(X_{nj}) = \frac{n}{m}$

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$

$\rightarrow \text{E}(X_{ij}) = 1 \cdot \frac{1}{m} + 0 \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$

$X_j = X_{1j} + \cdots + X_{nj}$ zählt Anzahl Daten in Liste $L(j)$.

$$\boxed{\text{E}(X_j) = \text{E}(X_{1j} + \cdots + X_{nj}) = \text{E}(X_{1j}) + \cdots + \text{E}(X_{nj}) = \frac{n}{m}}$$

Analyse (2)

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$
  (Liste enthält sicher das gesuchte Datum, und die anderen $n - 1$ Daten sind zufällig verteilt.)
  Also erwartete Suchdauer $\frac{1}{2}(1 + \frac{n-1}{m} + 1) = 1 + \frac{n-1}{2m} \approx 1 + \frac{\beta}{2}$
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.475.

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$
  (Liste enthält sicher das gesuchte Datum, und die anderen $n - 1$ Daten sind zufällig verteilt.)
  Also erwartete Suchdauer $\frac{1}{2}(1 + \frac{n-1}{m} + 1) = 1 + \frac{n-1}{2m} \approx 1 + \frac{\beta}{2}$
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.475.

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$
  (Liste enthält sicher das gesuchte Datum, und die anderen $n-1$ Daten sind zufällig verteilt.)
  Also erwartete Suchdauer $\frac{1}{2}(1 + \frac{n-1}{m} + 1) = 1 + \frac{n-1}{2m} \approx 1 + \frac{\beta}{2}$
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.475.

7.6 Offene Adressierung

Anforderungen

Anforderungen

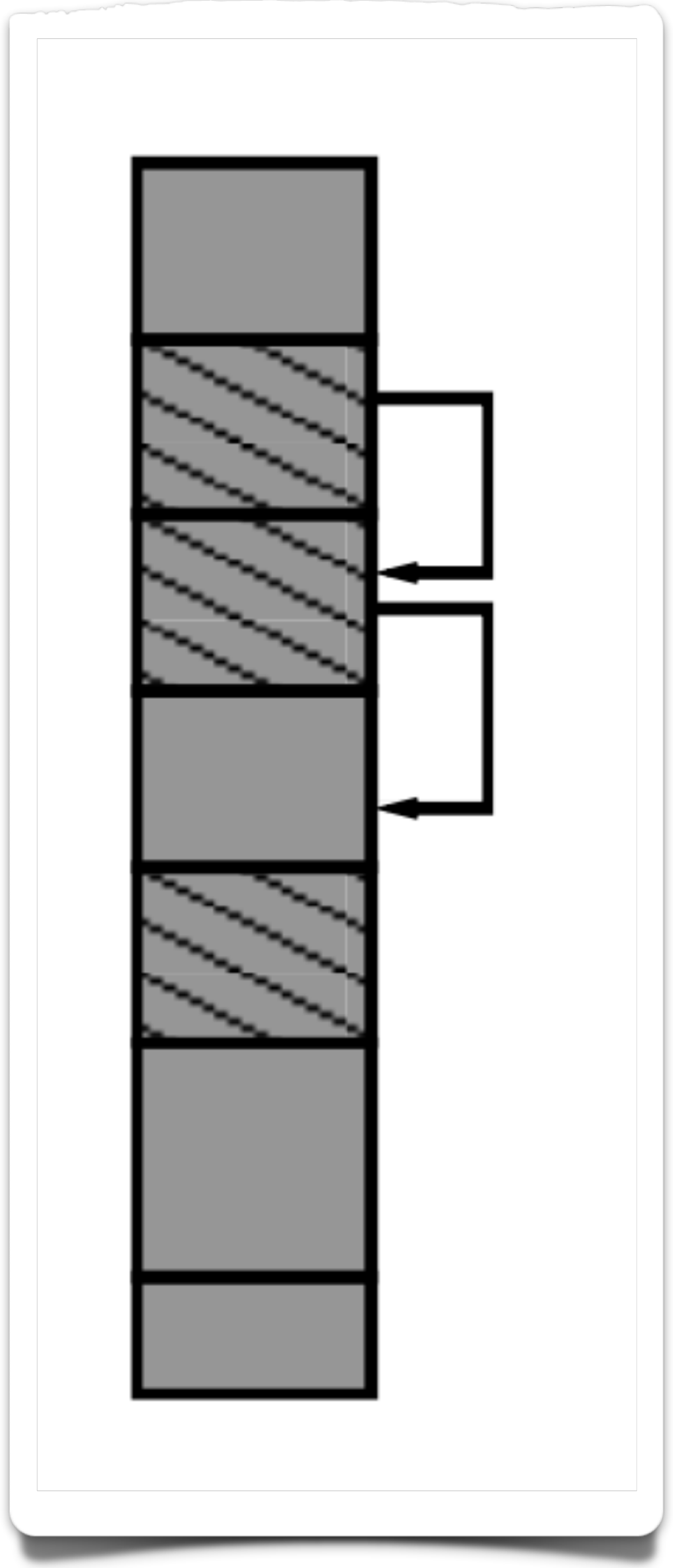
Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

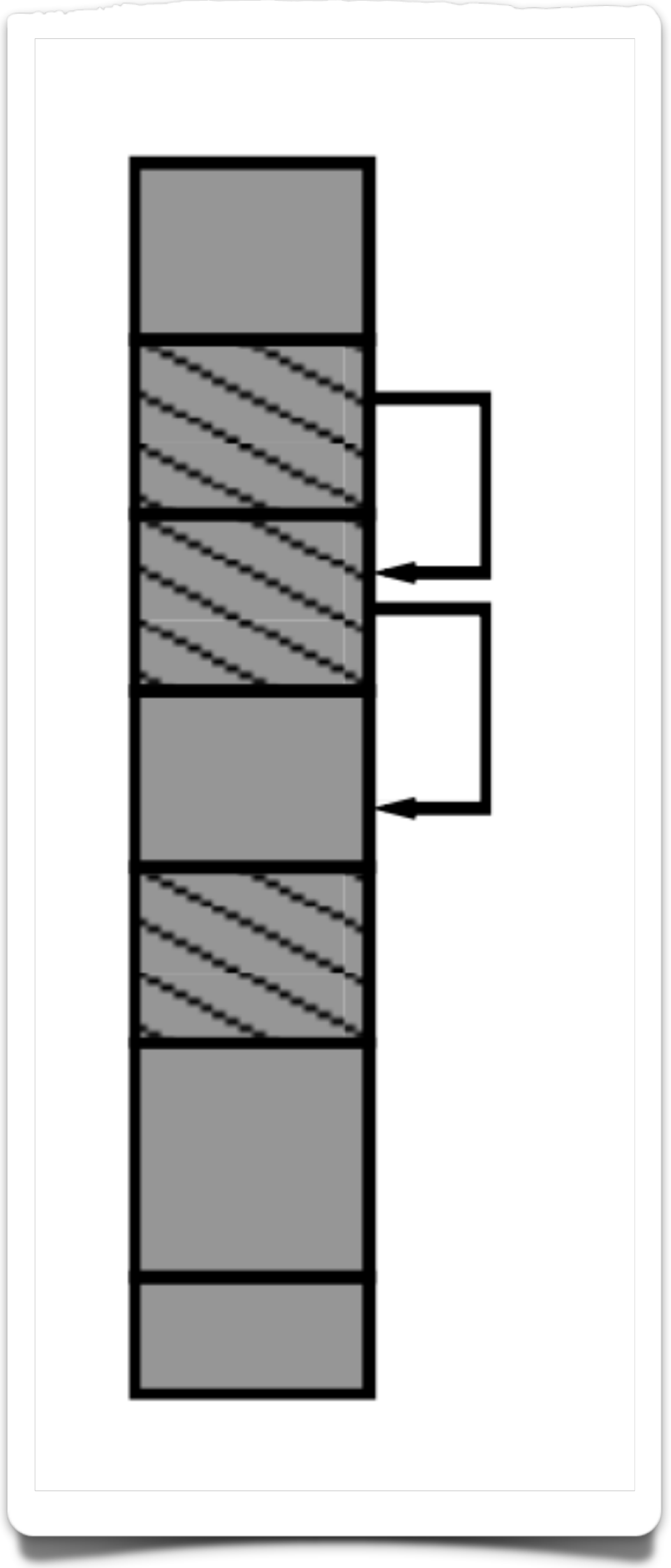


Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.



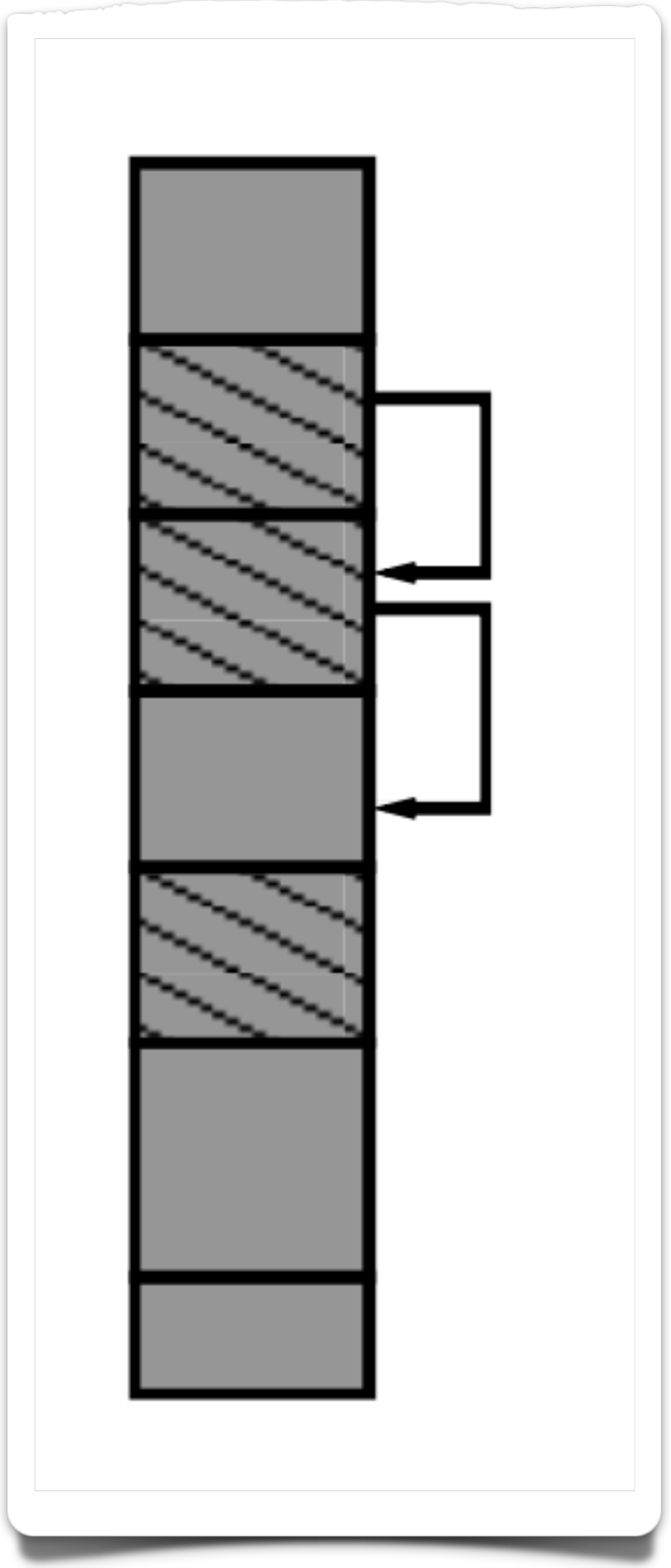
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



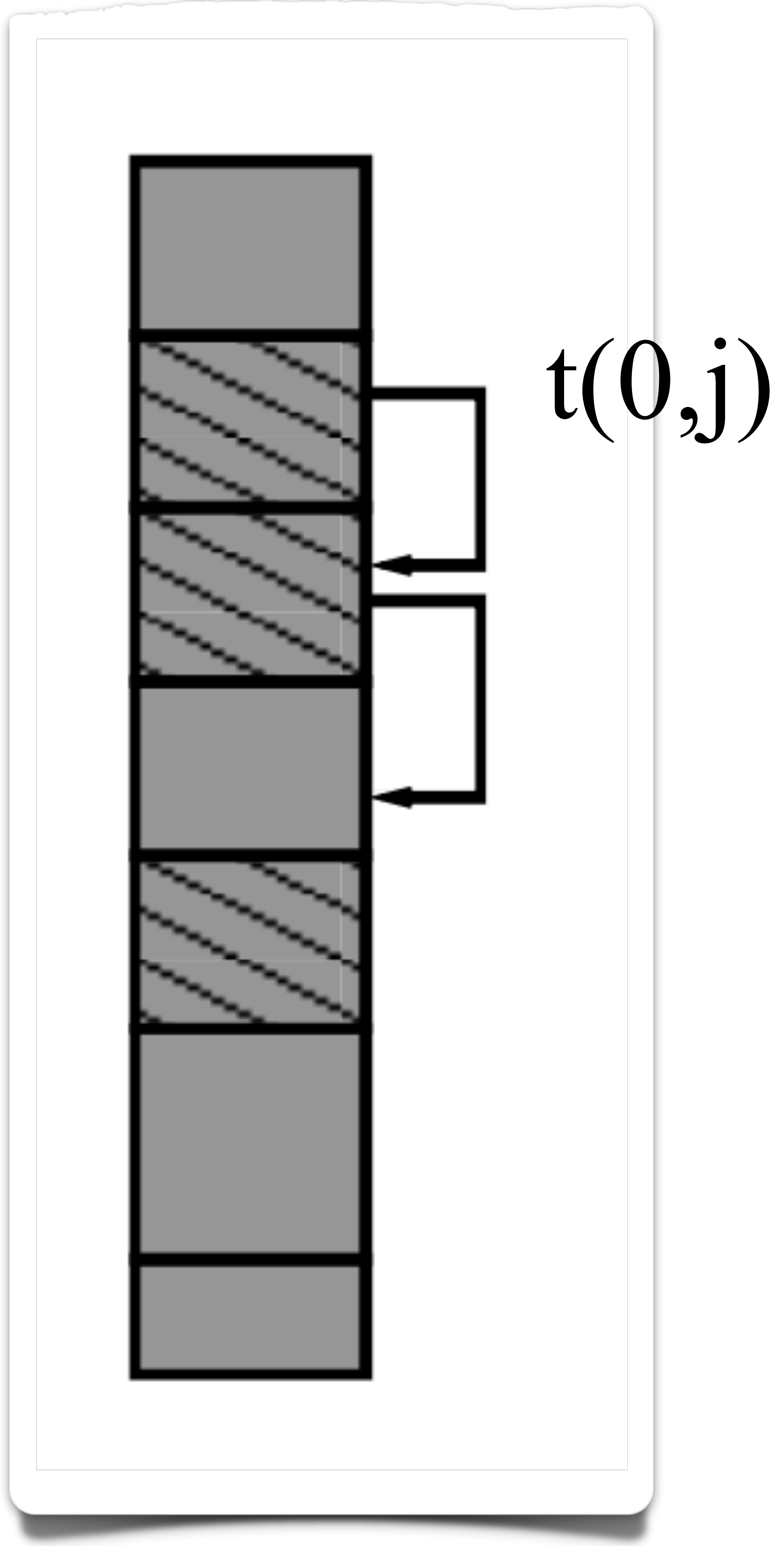
Anforderungen

<u>Zur Erinnerung:</u>

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



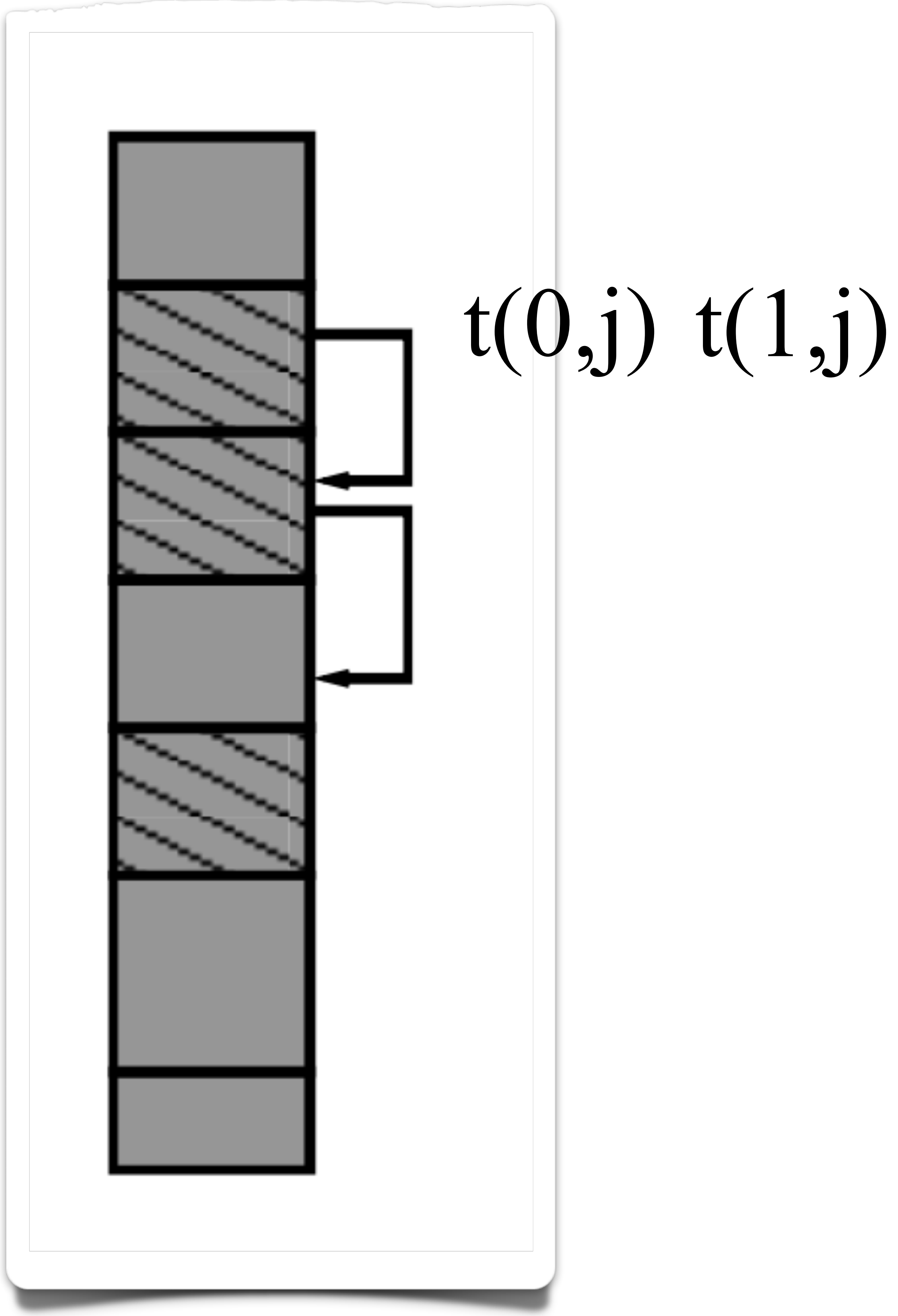
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



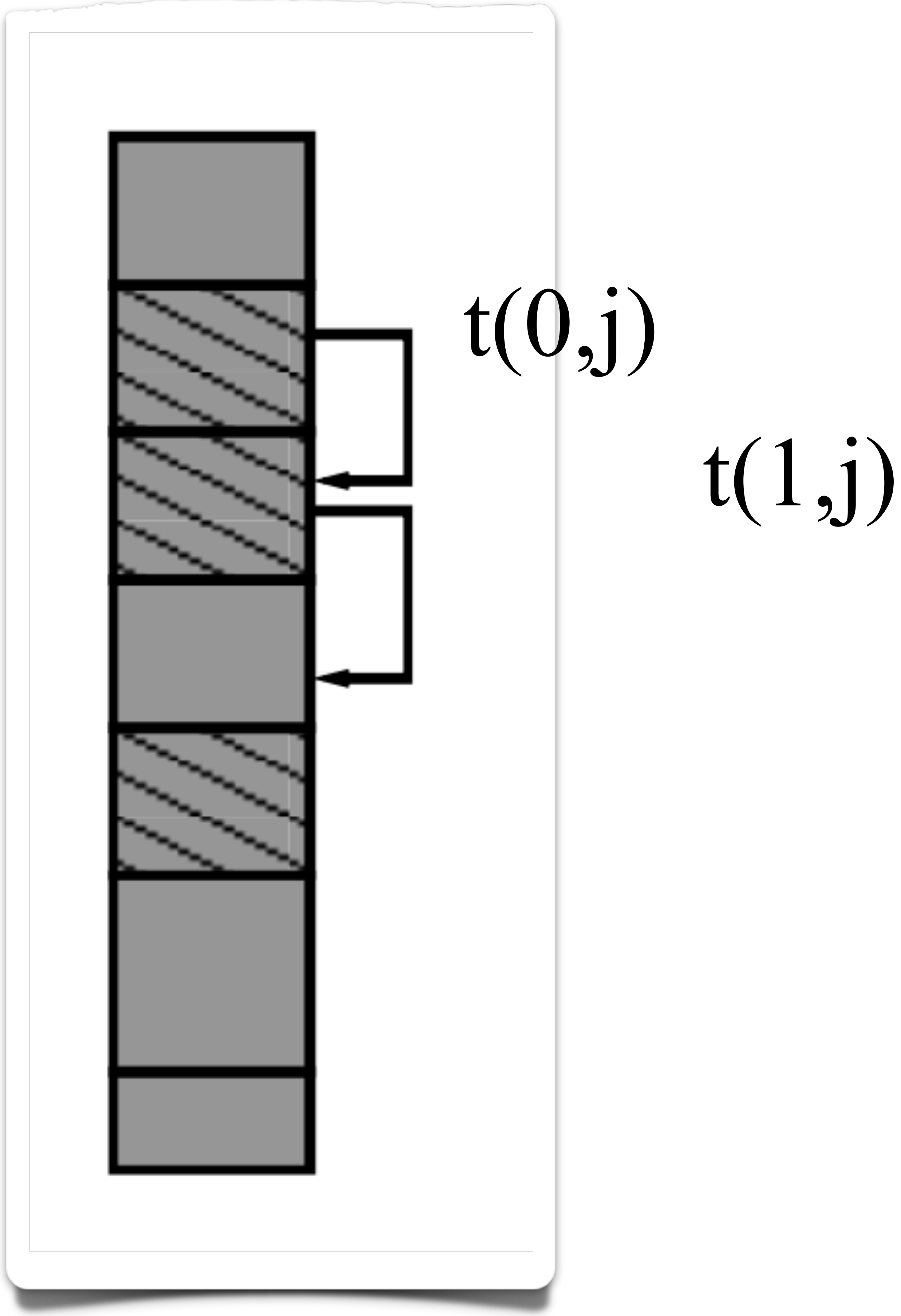
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



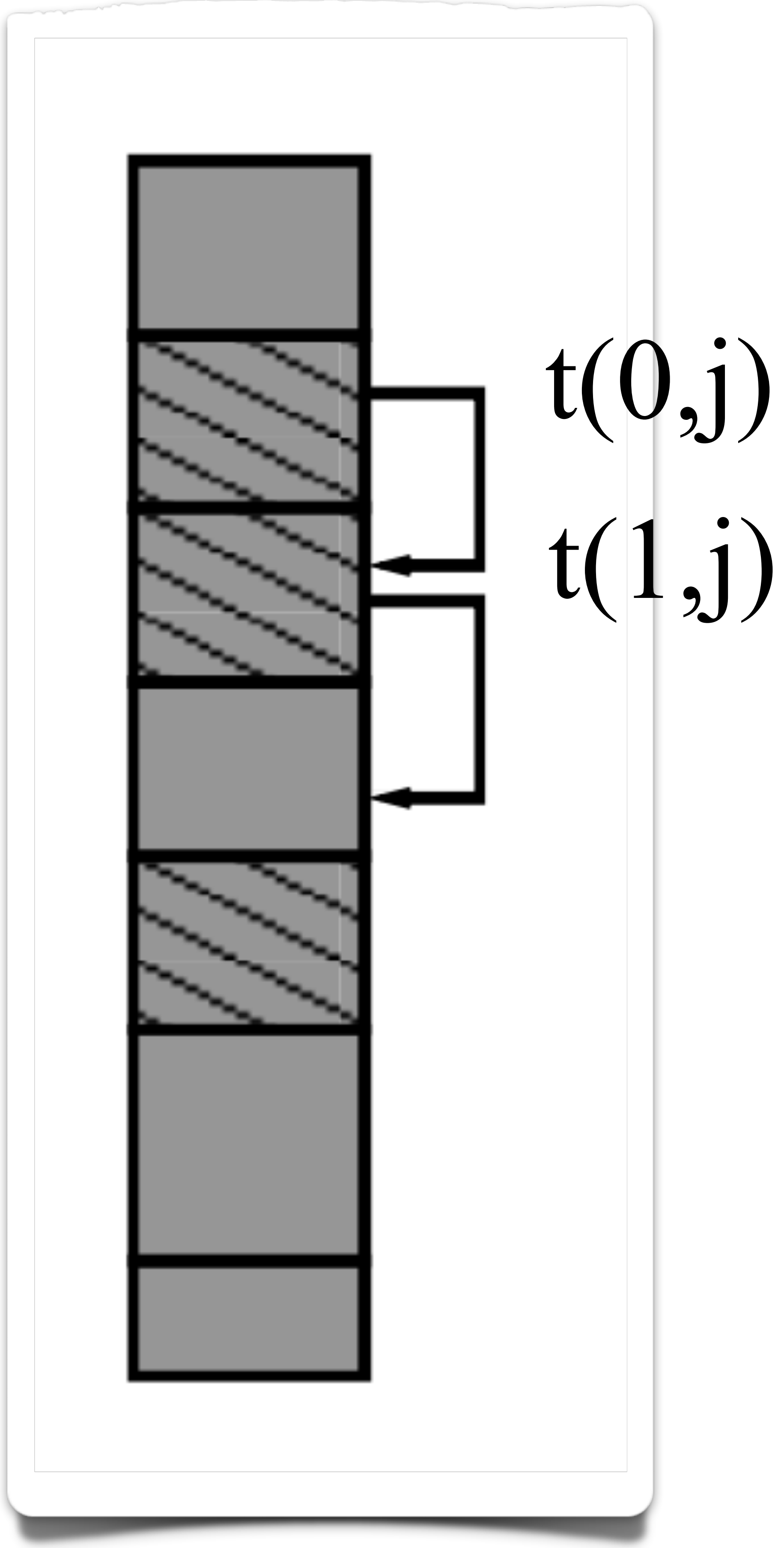
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



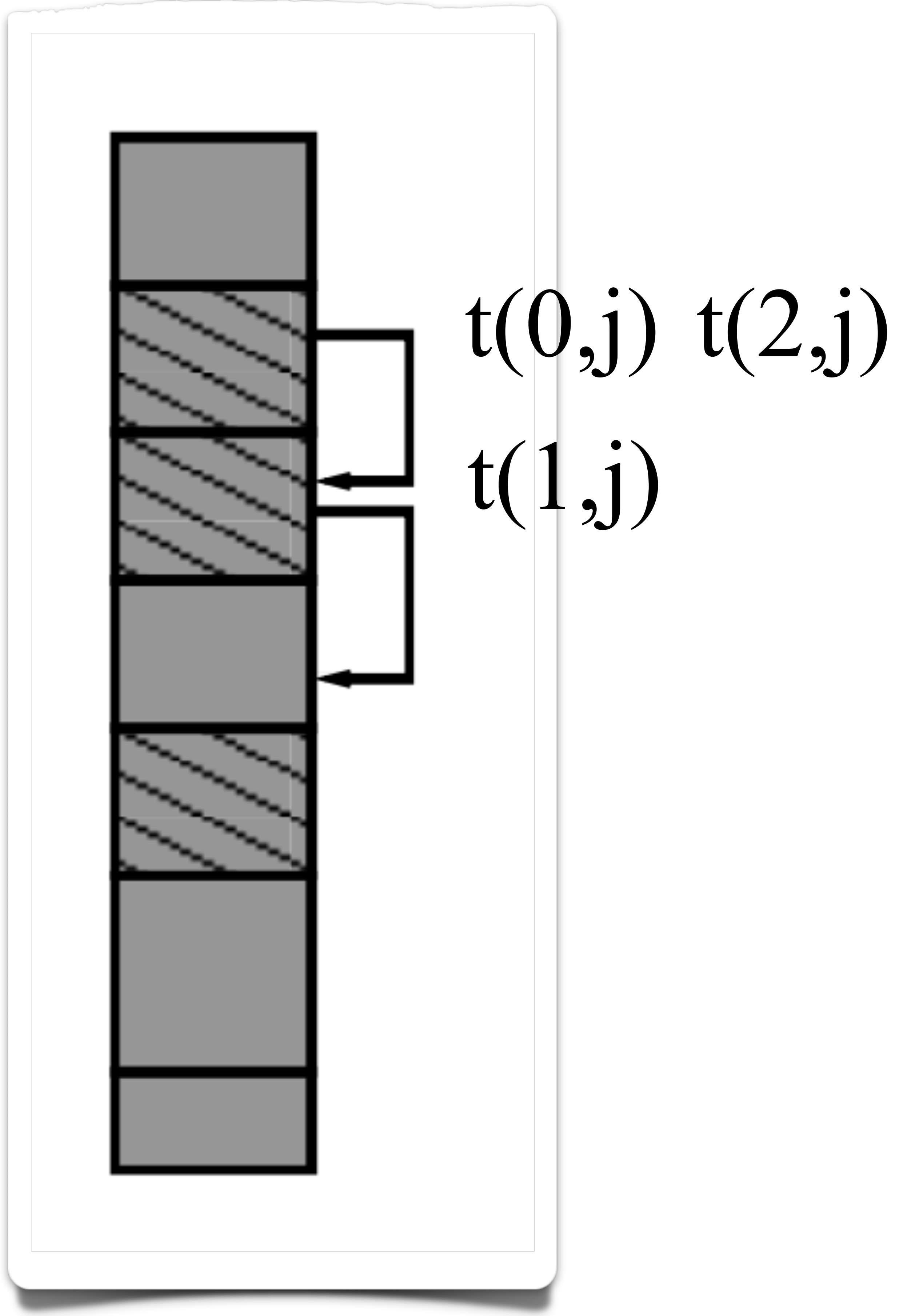
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



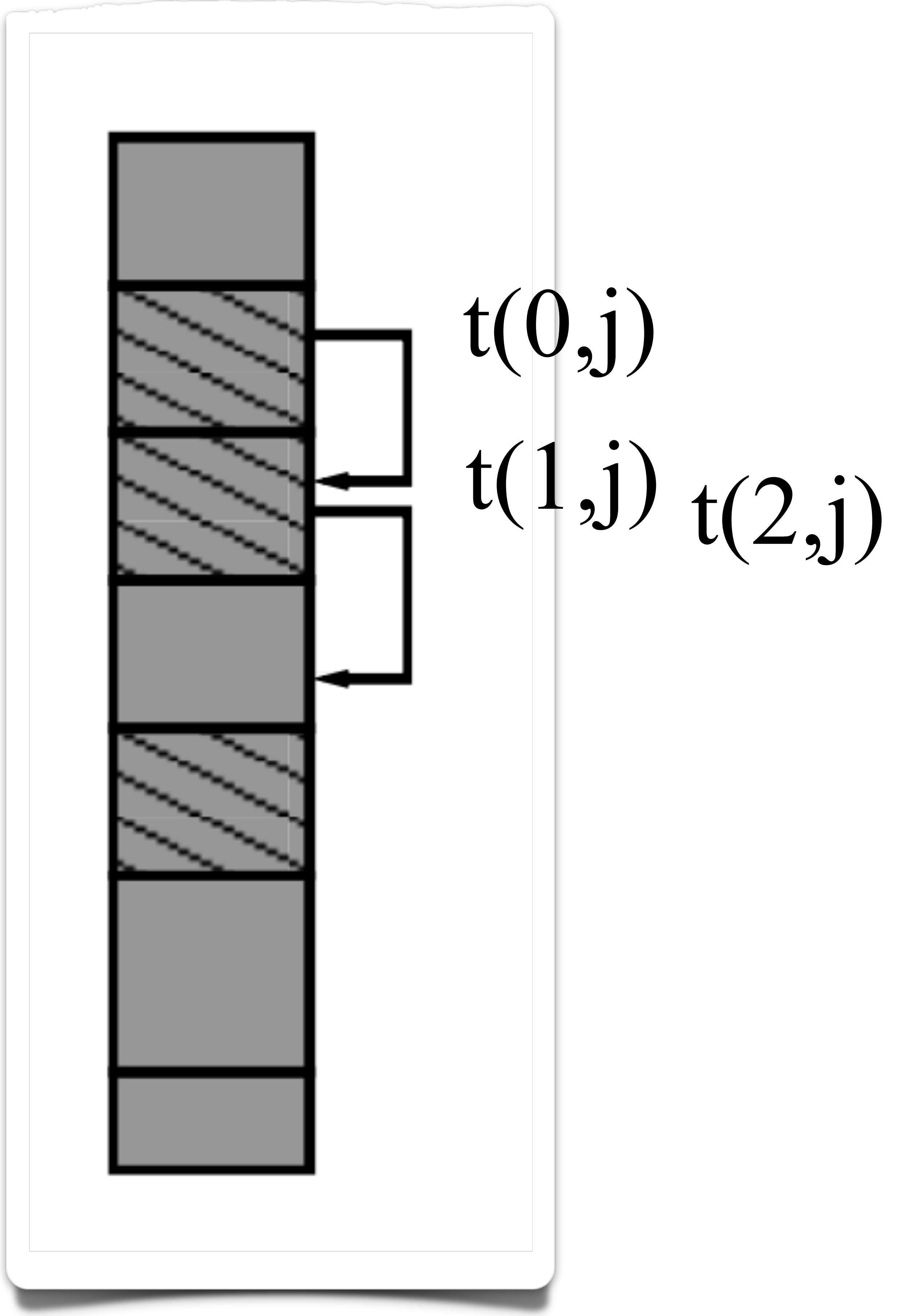
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j) :=$ Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



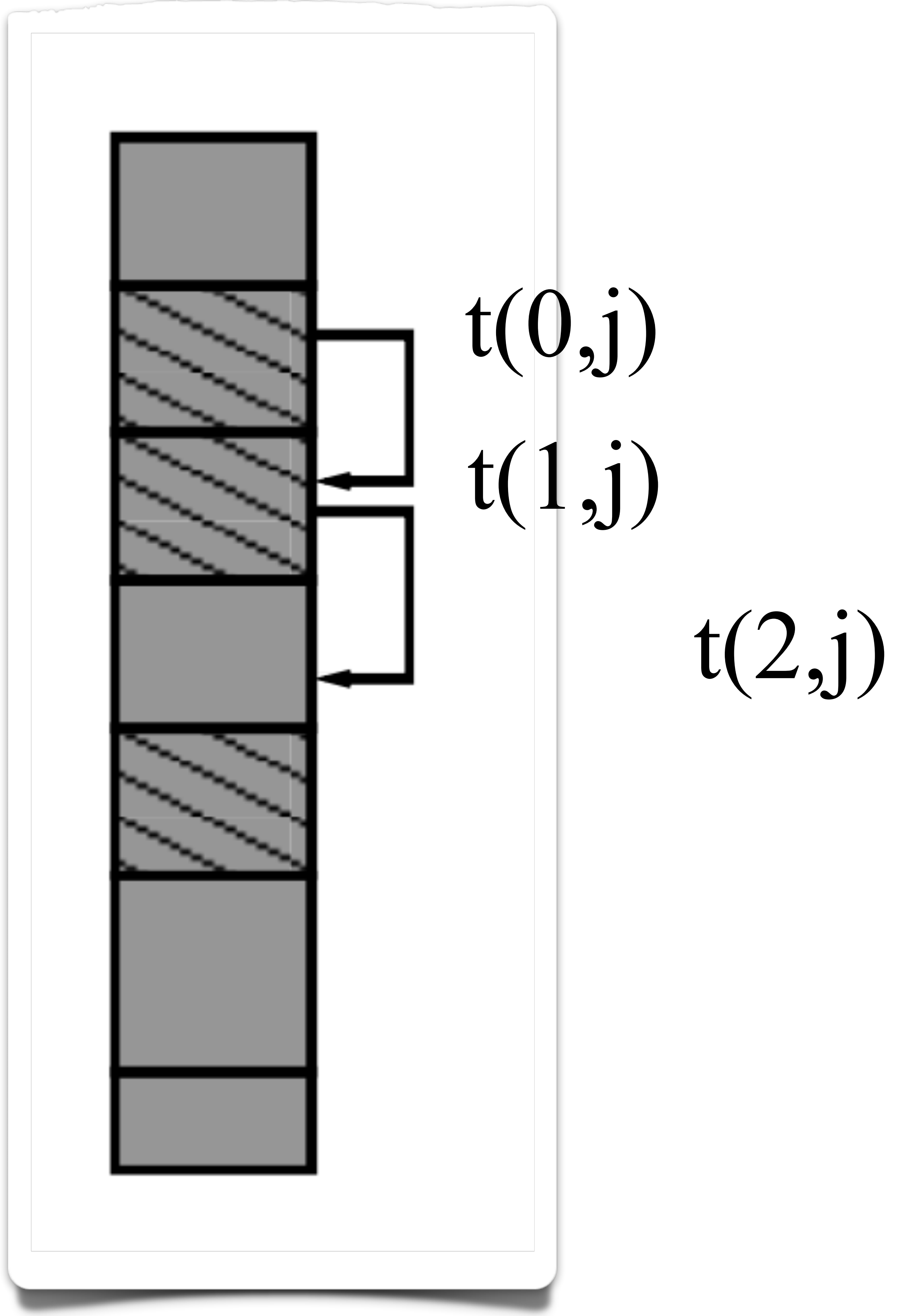
Anforderungen

<u>Zur Erinnerung:</u>

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$

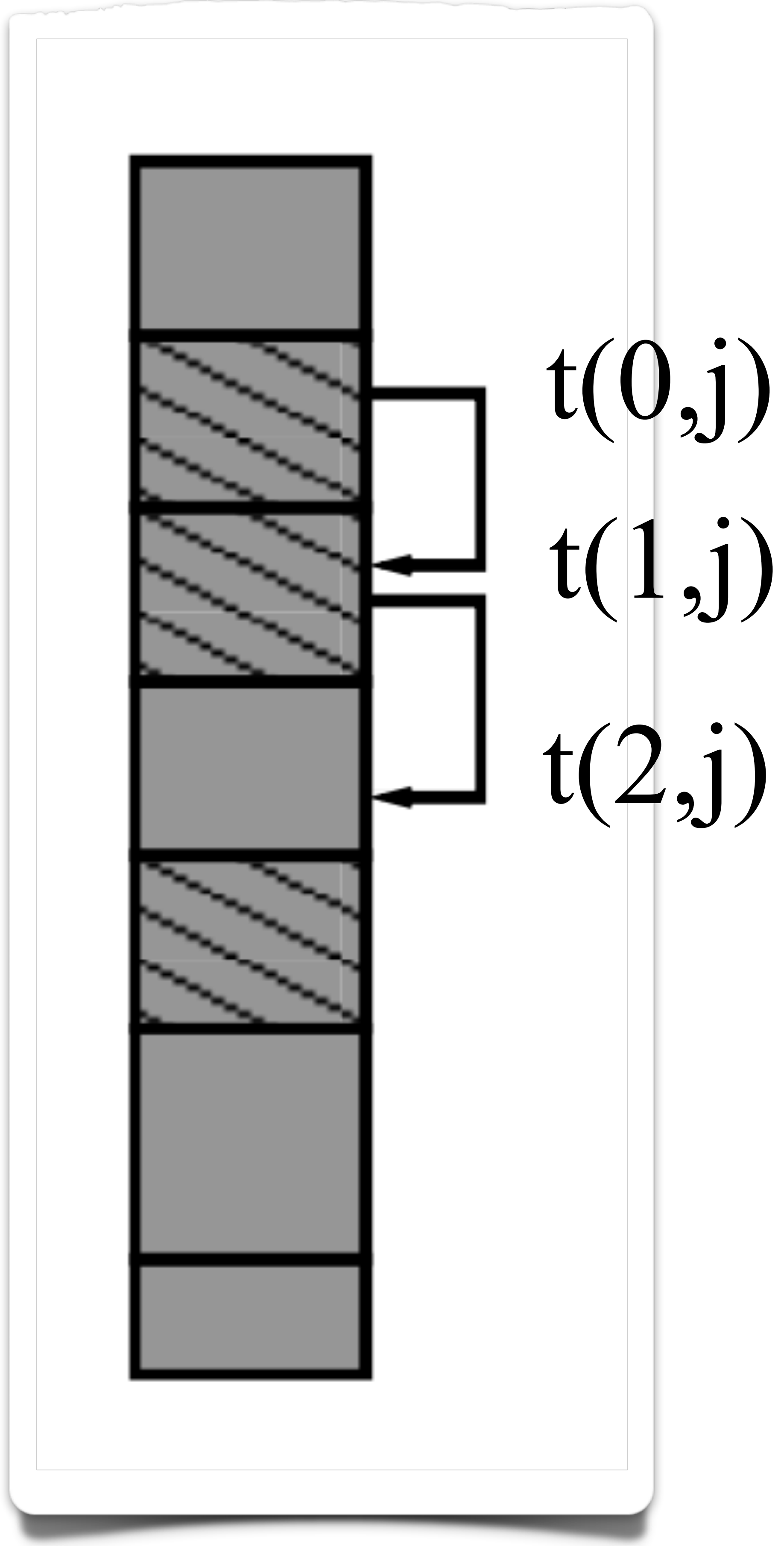


Anforderungen

Zur Erinnerung:
Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



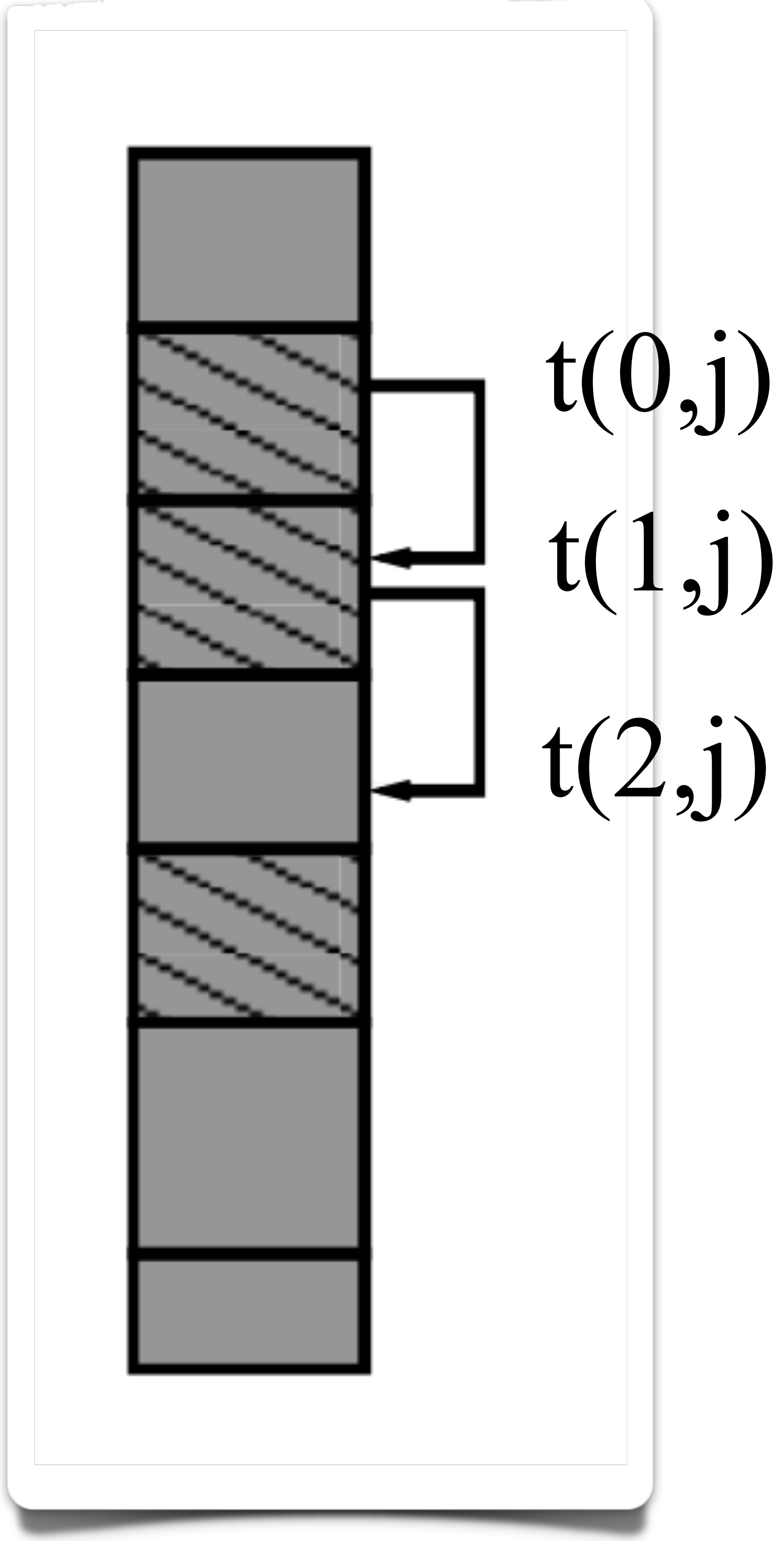
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



Anforderung an Funktion t:

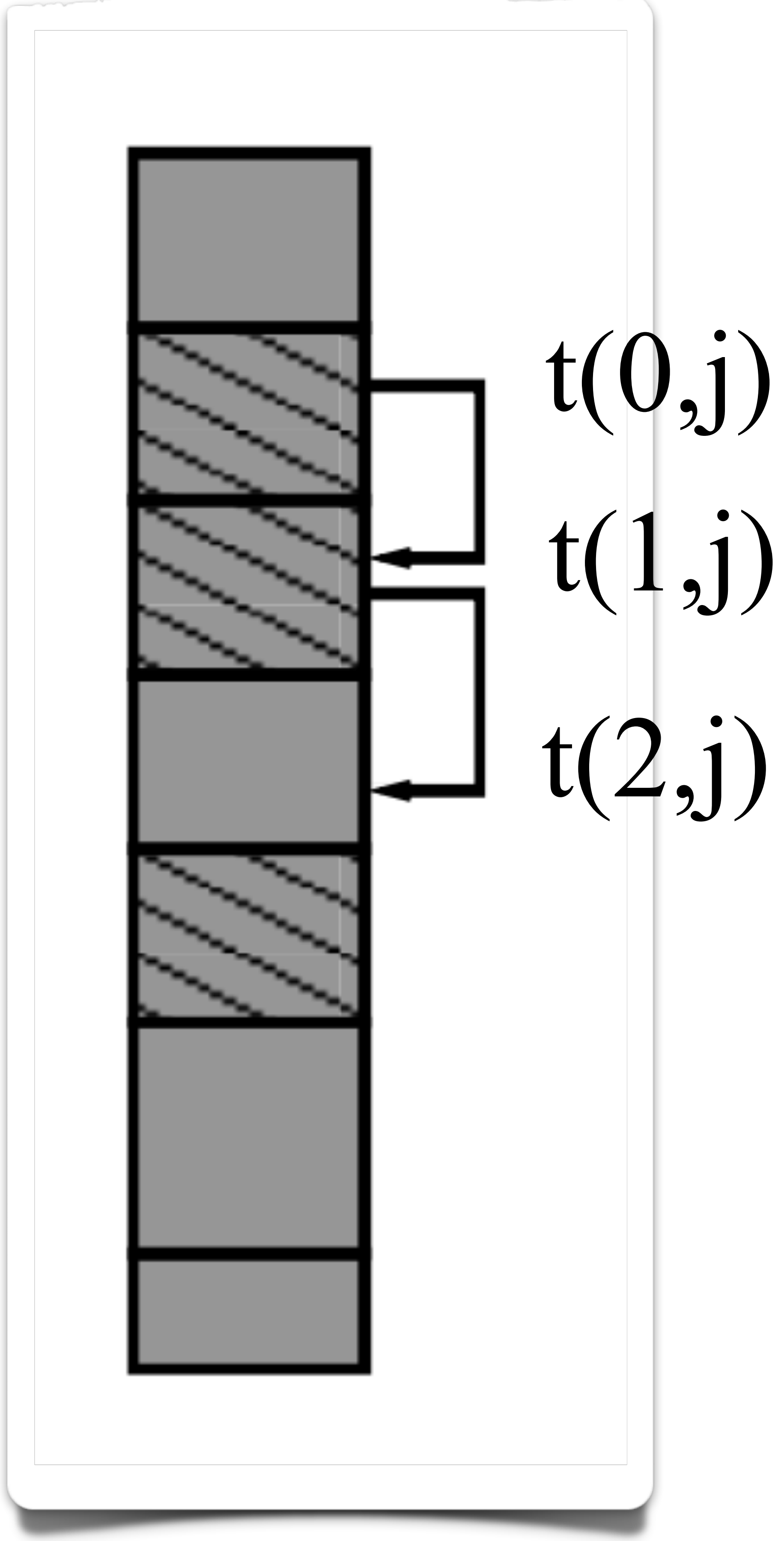
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



Anforderung an Funktion t:

- auch t in Zeit $O(1)$ berechenbar

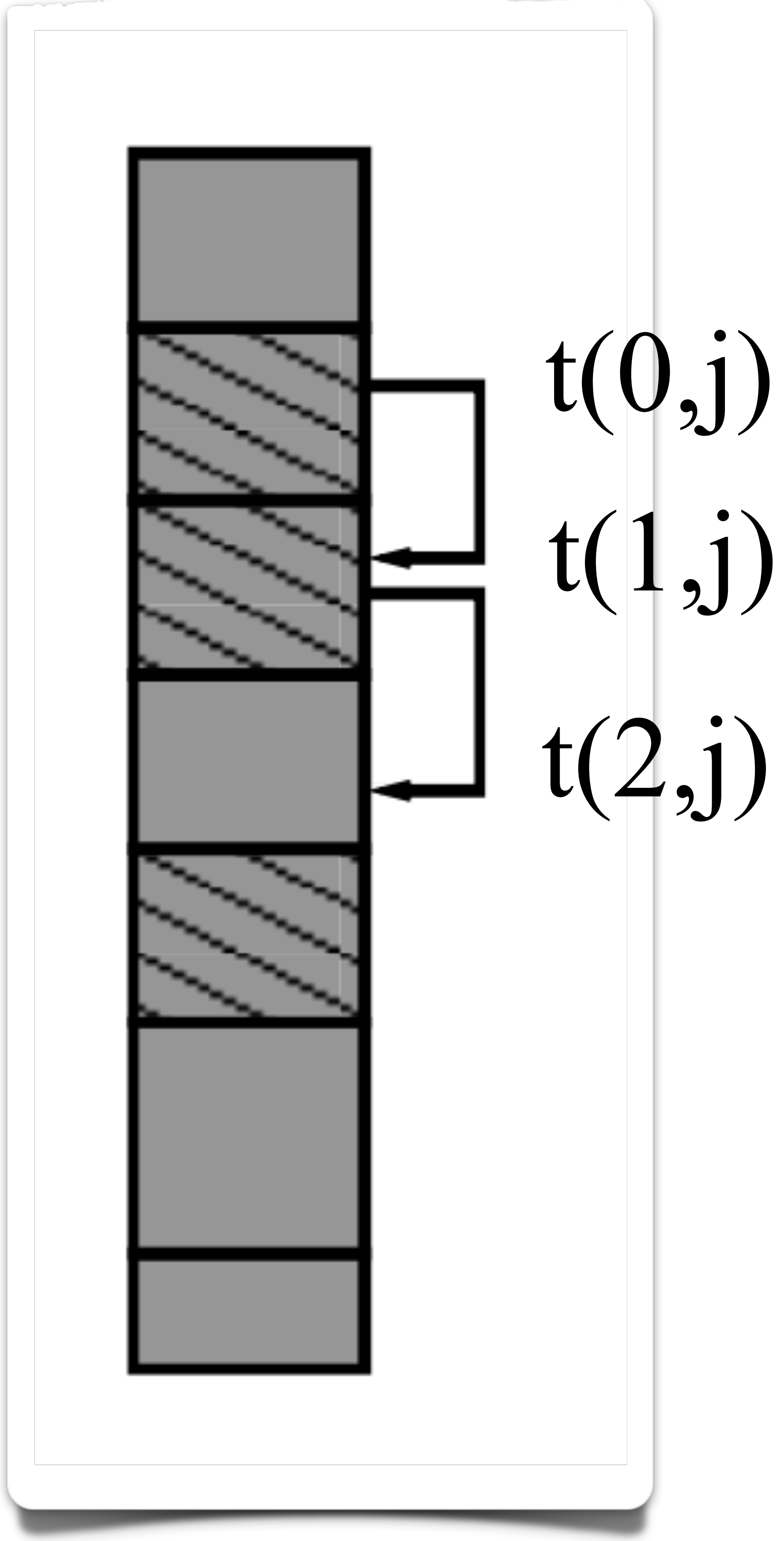
Anforderungen

Zur Erinnerung:

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i, j)$:= Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



Anforderung an Funktion t:

- auch t in Zeit $O(1)$ berechenbar
- $t(0, j) = j$

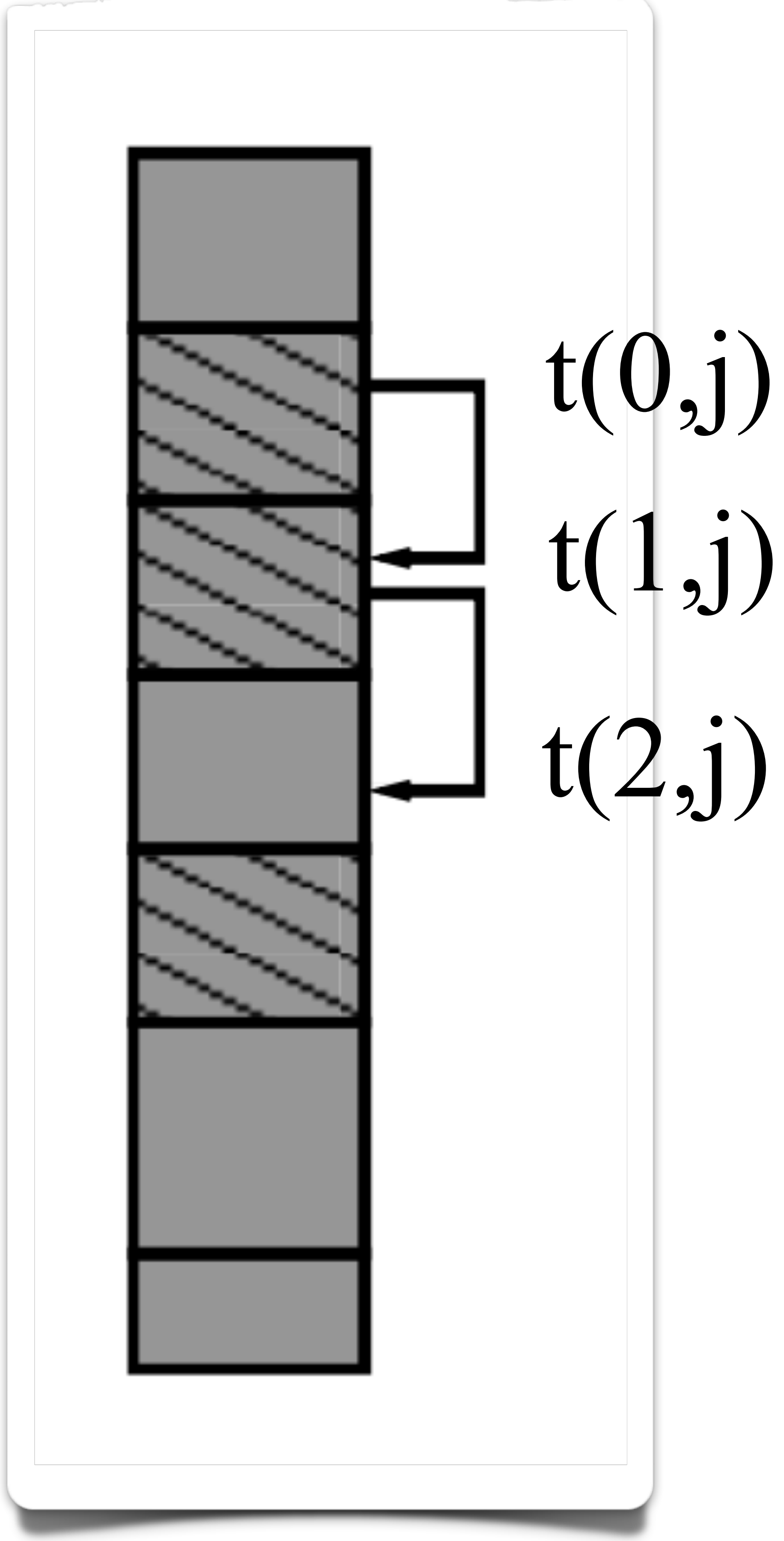
Anforderungen

<u>Zur Erinnerung:</u>

Im Kollisionsfall nach fester Regel alternativen freien Platz in Hashtabelle suchen (Sondierungsfolge).

Voraussetzung: Auswertung von h gilt als eine Operation.

$t(i,j) :=$ Position des i-ten Versuchs zum Einfügen von Daten x mit $h(x) = j$



Anforderung an Funktion t:

- auch t in Zeit $O(1)$ berechenbar
- $t(0,j) = j$
- $t(\cdot, j) : \{0, \ldots, m-1\} \rightarrow \{0, \ldots, m-1\}$ bijektiv

Operationen

Operationen

- search(x):
  - Berechne $j := h(x)$.
  - Suche x an den Positionen $t(0, j), \ldots, t(m-1, j)$.
  - Abbruch, wenn x gefunden oder freie Stelle entdeckt (kein Datum mit Schlüssel x).
- insert(x) nach erfolgloser Suche:
  Freien Platz finden (sonst Overflow) und
  x dort einfügen.
- delete(x) nach erfolgreicher Suche:
  Das Datum kann nicht einfach entfernt werden, da
  search frühzeitig Lücken finden würde und eine
  Suche fälschlicherweise als erfolglos abbrechen könnte.

Löschen?!

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Ausweg: Speicherplatz/Position als besetzt, noch nie besetzt oder wieder frei markieren.

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Ausweg: Speicherplatz/Position als besetzt, noch nie besetzt oder wieder frei markieren.

$\rightarrow$ Suche wird nur an Positionen mit Markierung noch nie besetzt vorzeitig abgebrochen.

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Ausweg: Speicherplatz/Position als besetzt, noch nie besetzt oder wieder frei markieren.

$\rightarrow$ Suche wird nur an Positionen mit Markierung noch nie besetzt vorzeitig abgebrochen.

Problem: Im Laufe der Zeit keine Position mehr, die mit noch nie besetzt markiert ist.

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Ausweg: Speicherplatz/Position als besetzt, noch nie besetzt oder wieder frei markieren.

$\longrightarrow$ Suche wird nur an Positionen mit Markierung noch nie besetzt vorzeitig abgebrochen.

Problem: Im Laufe der Zeit keine Position mehr, die mit noch nie besetzt markiert ist.

$\longrightarrow$ Hashing wird ineffizient.

Löschen?!

Problem: Datum kann bei Operation delete(x) nicht ohne weiteres gelöscht werden.

Ausweg: Speicherplatz/Position als besetzt, noch nie besetzt oder wieder frei markieren.

$\longrightarrow$ Suche wird nur an Positionen mit Markierung noch nie besetzt vorzeitig abgebrochen.

Problem: Im Laufe der Zeit keine Position mehr, die mit noch nie besetzt markiert ist.

$\longrightarrow$ Hashing wird ineffizient.

Offenes Hashing nur bei Anwendungen mit search und insert.

Sondieren

Sondieren

- Lineares Sondieren

Sondieren

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren

Sondieren

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren
- Multiplikatives Sondieren

Sondieren

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren
- Multiplikatives Sondieren
- Doppeltes Hashing

Sondieren

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren
- Multiplikatives Sondieren
- Doppeltes Hashing

Hilfsmittel bei der Analyse: ideales Hashing

Lineares Sondieren

Lineares Sondieren

$$t(i,j) := (i+j) \bmod m$$

Lineares Sondieren

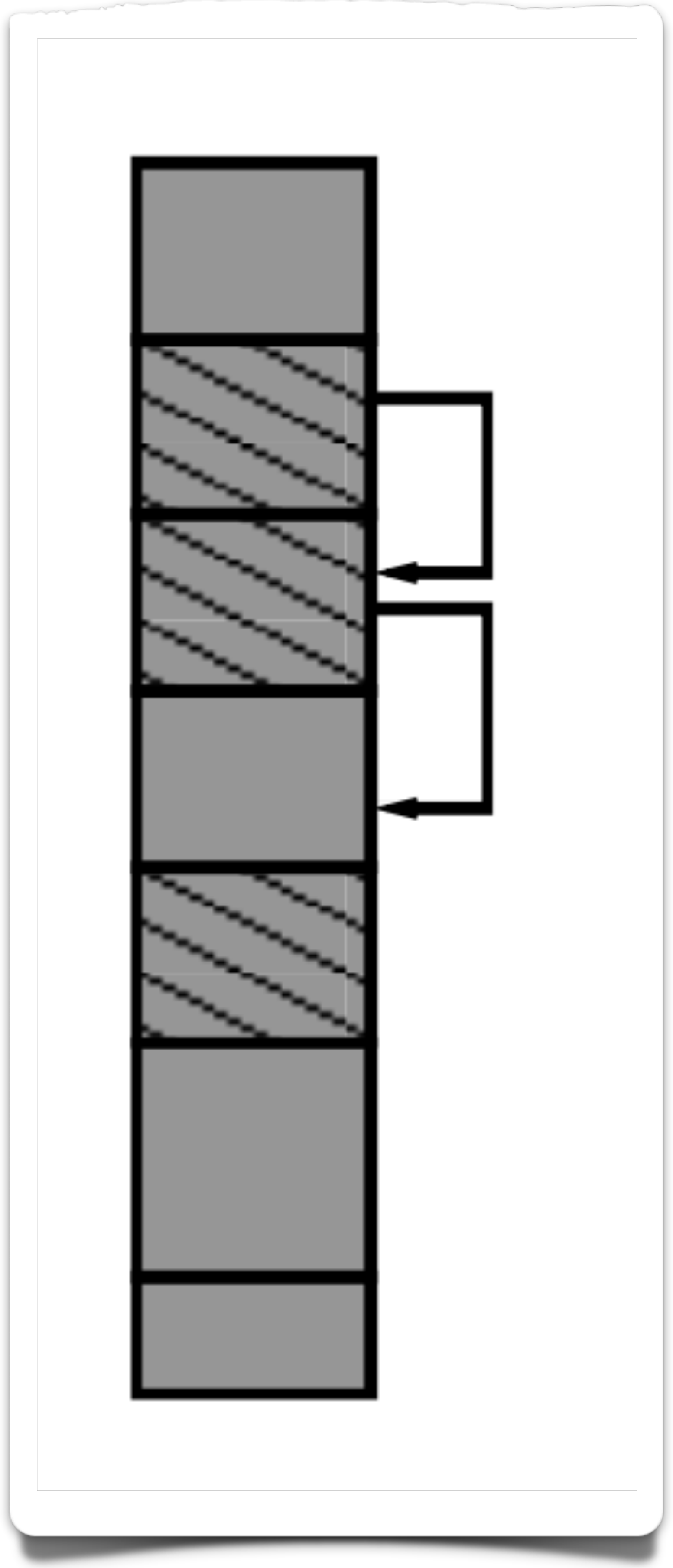
$t(i,j) := (i+j) \text{ mod } m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Lineares Sondieren

$t(i, j) := (i + j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

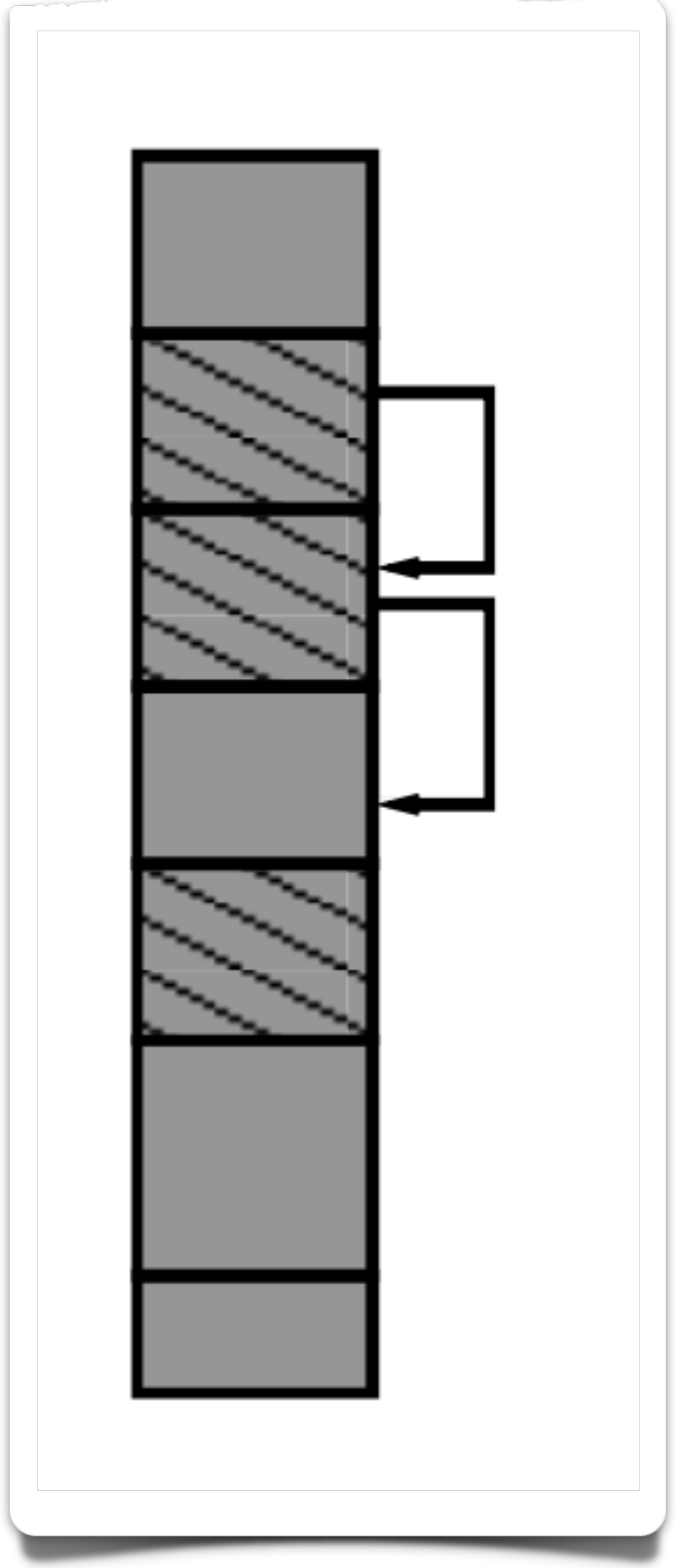


Lineares Sondieren

$t(i, j) := (i + j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:



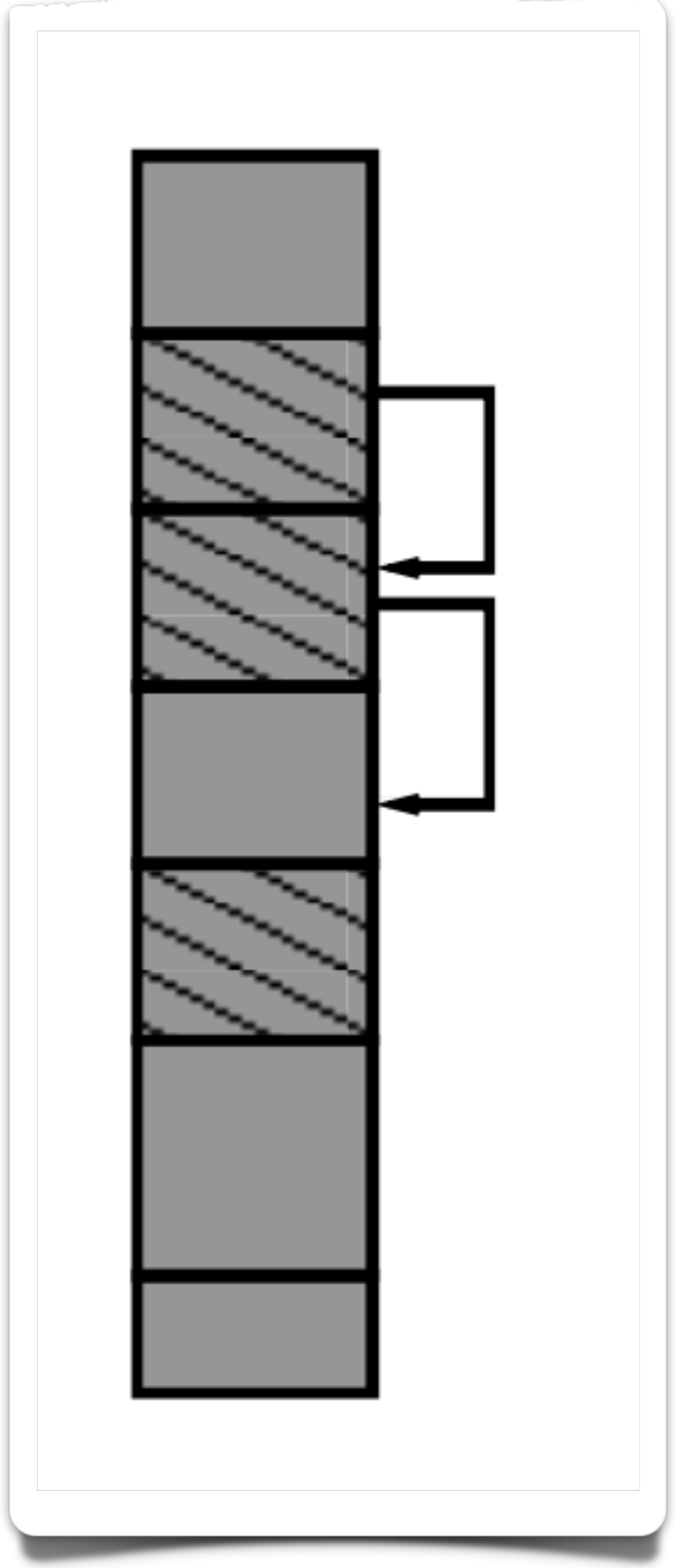
Lineares Sondieren

$t(i, j) := (i + j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6



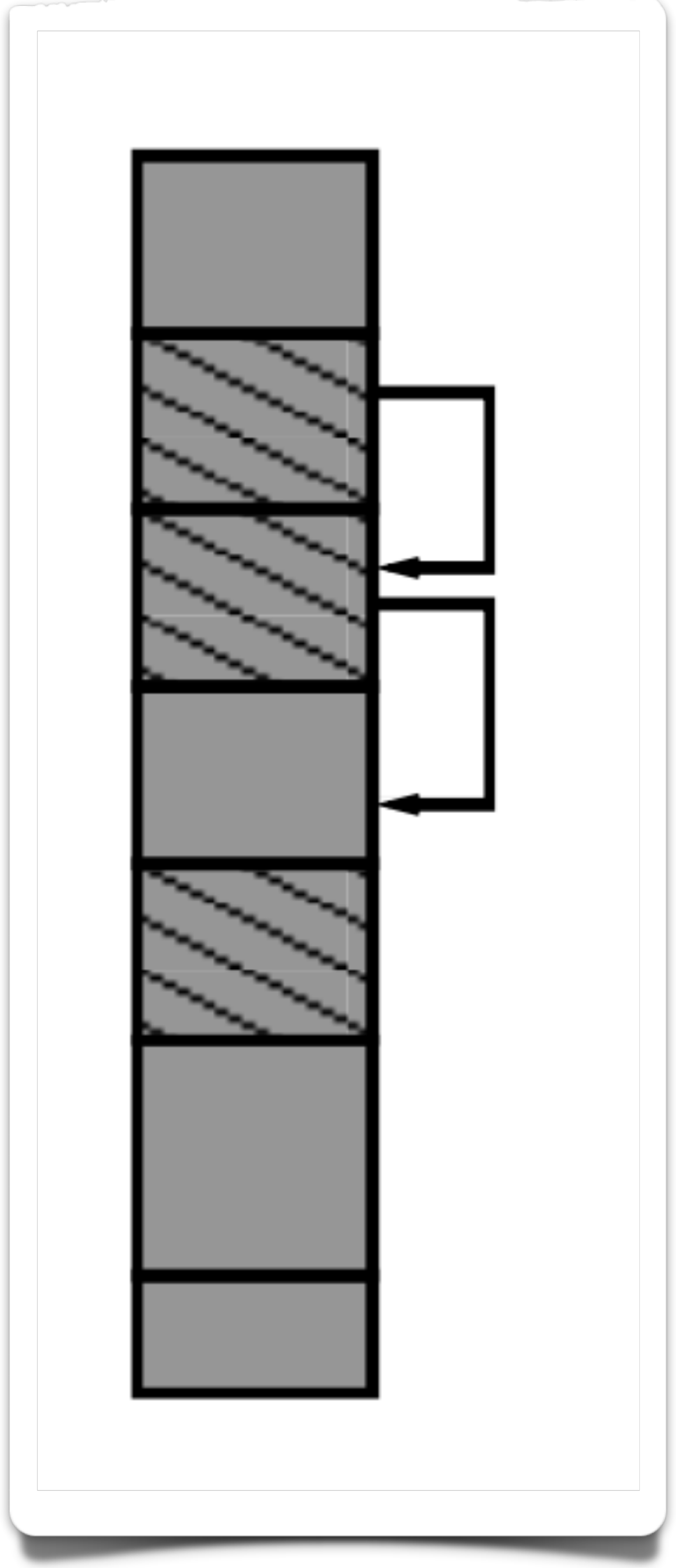
Lineares Sondieren

$t(i,j) := (i+j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Problem: *Clusterbildung*



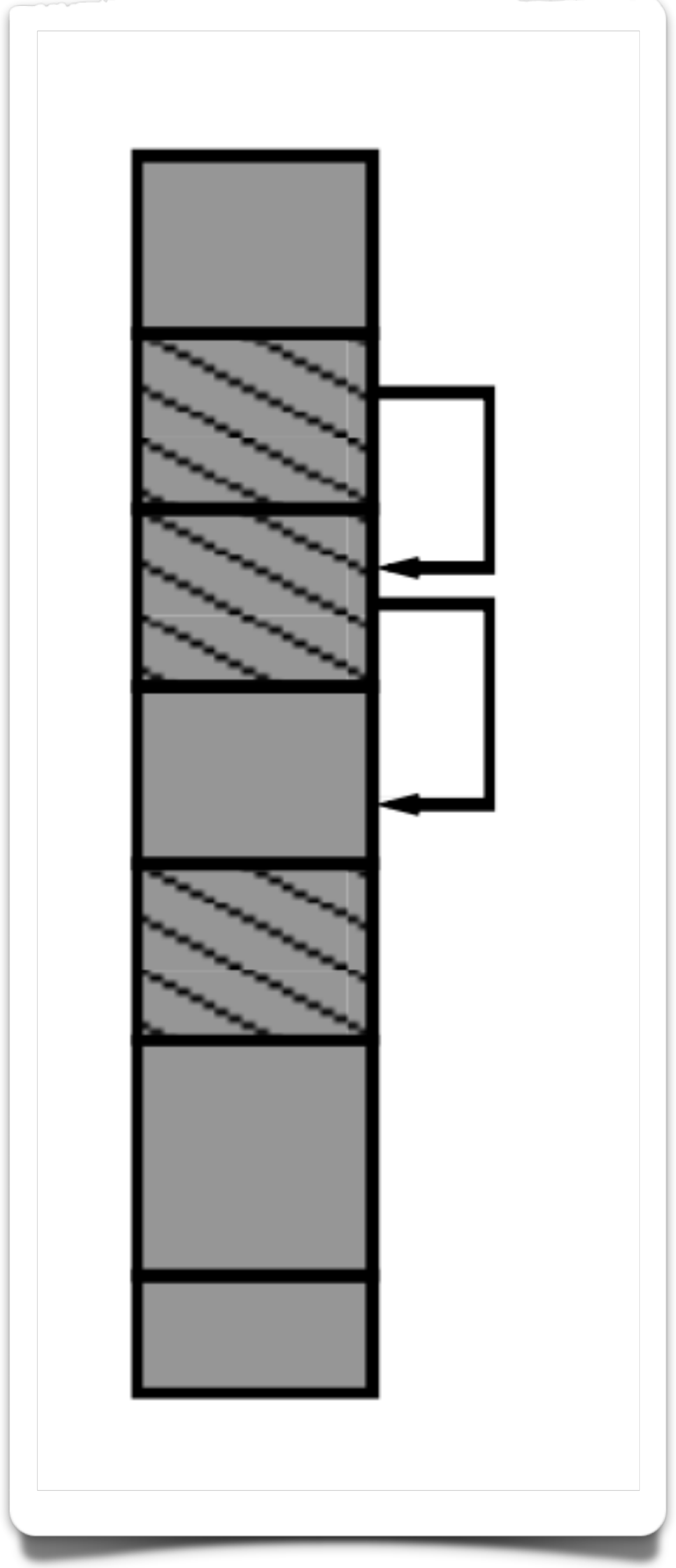
Lineares Sondieren

$t(i, j) := (i + j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Problem: *Clusterbildung*
Tendenz, dass immer längere zusammenhängende, belegte Abschnitte in der Hashtabelle entstehen, sogenannte *Cluster*



Lineares Sondieren

$t(i, j) := (i + j) \bmod m$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

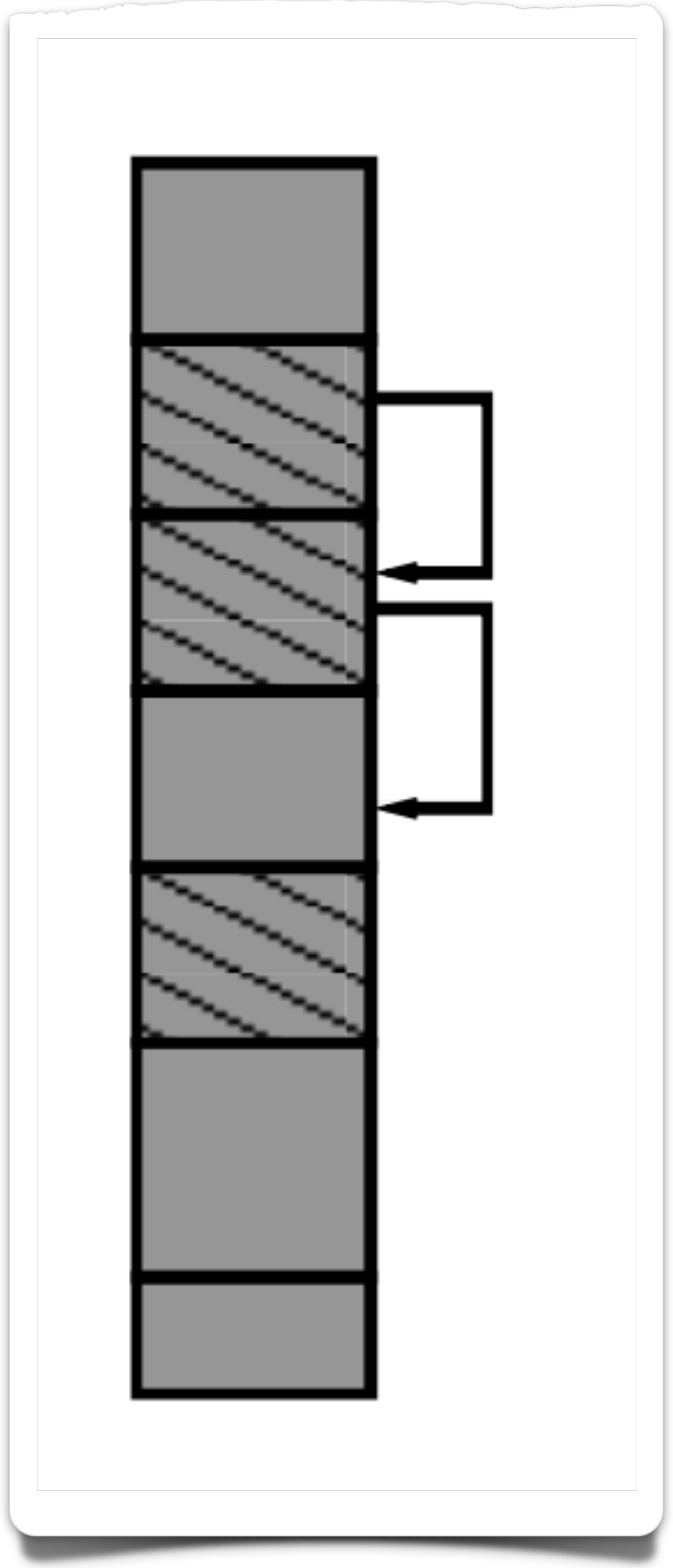
Sondierungsfolge:

7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Problem: *Clusterbildung*

Tendenz, dass immer längere zusammenhängende, belegte Abschnitte in der Hashtabelle entstehen, sogenannte *Cluster*

$\longrightarrow$ erhöhte Suchzeiten



Problem des Linearen Sondieren

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17 belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18

Problem des Linearen Sondieren

Beispiel: $m = 19$, Positionen $2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 17$ belegt

$h(x)$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
landet an Position:	0	1	3	3	4	7	7	7	8	13	13	13	13	13	14	15	16	18	18
W.keit:	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19}$	0	$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{19}$	0	0	$\frac{3}{19}$	$\frac{1}{19}$	0	0	0	0	$\frac{5}{19}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19}$	0	$\frac{2}{19}$

Ideales Hashing

Ideales Hashing

Wunsch:

Zu jedem Zeitpunkt haben alle Positionen die gleiche Wahrscheinlichkeit, besetzt zu werden.

Ideales Hashing

Wunsch:

Zu jedem Zeitpunkt haben alle Positionen die gleiche Wahrscheinlichkeit, besetzt zu werden.

Beobachtung:

Das geht numerisch nicht genau, im Beispiel 11 freie Plätze, 19 mögliche Hashwerte, also alle Wahrscheinlichkeiten $k/19$, nicht $k/11$.

Ideales Hashing

Wunsch:

Zu jedem Zeitpunkt haben alle Positionen die gleiche Wahrscheinlichkeit, besetzt zu werden.

Beobachtung:

Das geht numerisch nicht genau, im Beispiel 11 freie Plätze, 19 mögliche Hashwerte, also alle Wahrscheinlichkeiten $k/19$, nicht $k/11$.

Modell des idealen Hashings:

Alle $\binom{m}{n}$ Möglichkeiten, die n besetzten Plätze für m Schlüssel auszuwählen, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Ideales Hashing

Wunsch:

Zu jedem Zeitpunkt haben alle Positionen die gleiche Wahrscheinlichkeit, besetzt zu werden.

Beobachtung:

Das geht numerisch nicht genau, im Beispiel 11 freie Plätze, 19 mögliche Hashwerte, also alle Wahrscheinlichkeiten $k/19$, nicht $k/11$.

Modell des idealen Hashings:

Alle $\binom{m}{n}$ Möglichkeiten, die n besetzten Plätze für m Schlüssel auszuwählen, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Lineares Sondieren ist weit vom idealen Hashing entfernt.

Quadratisches Sondieren

Quadratisches Sondieren

$$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j, j+1^2, j-1^2, j+2^2, j-2^2, \ldots,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

:

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11,

:

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3,

:

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16, -2

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7, \quad 8, \quad 6, \quad 11, \quad 3, \quad 16, \quad \begin{matrix} -2 \\ = 17, \end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16, -2 $= 17$, 23

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16, $-2 = 17$, $23 = 4$,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16, -2 $= 17$, 23 $= 4$, -9

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7, \quad 8, \quad 6, \quad 11, \quad 3, \quad 16, \quad \begin{matrix} -2 \\ = 17, \end{matrix} \quad \begin{matrix} 23 \\ = 4, \end{matrix} \quad \begin{matrix} -9 \\ = 10, \end{matrix}$

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7, 8, 6, 11, 3, 16, $-2 = 17$, $23 = 4$, $-9 = 10$, 32

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{array}{c}-2\\=17,\end{array}\quad \begin{array}{c}23\\=4,\end{array}\quad \begin{array}{c}-9\\=10,\end{array}\quad \begin{array}{c}32\\=13,\end{array}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix}-2\\ =17,\end{matrix}\quad \begin{matrix}23\\ =4,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-9\\ =10,\end{matrix}\quad \begin{matrix}32\\ =13,\end{matrix}\quad -18$

:

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix} -2 \\ = 17, \end{matrix}\quad \begin{matrix} 23 \\ = 4, \end{matrix}\quad \begin{matrix} -9 \\ = 10, \end{matrix}\quad \begin{matrix} 32 \\ = 13, \end{matrix}\quad \begin{matrix} -18 \\ = 1, \end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{array}{c}-2\\ = 17,\end{array}\quad \begin{array}{c}23\\ = 4,\end{array}\quad \begin{array}{c}-9\\ = 10,\end{array}\quad \begin{array}{c}32\\ = 13,\end{array}\quad \begin{array}{c}-18\\ = 1,\end{array}$

43

$\vdots$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

7,	8,	6,	11,	3,	16,	-2	23	-9	32	-18
						$= 17$,	$= 4$,	$= 10$,	$= 13$,	$= 1$,

43
$= 5$,

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \text{ mod } m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix} -2 \\ =17, \end{matrix}\quad \begin{matrix} 23 \\ =4, \end{matrix}\quad \begin{matrix} -9 \\ =10, \end{matrix}\quad \begin{matrix} 32 \\ =13, \end{matrix}\quad \begin{matrix} -18 \\ =1, \end{matrix}$

$\begin{matrix} 43 \\ =5, \end{matrix}\quad -29$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix}-2\\=17,\end{matrix}\quad \begin{matrix}23\\=4,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-9\\=10,\end{matrix}\quad \begin{matrix}32\\=13,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-18\\=1,\end{matrix}$

$\begin{matrix}43\\=5,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-29\\=9,\end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j + (\frac{m-1}{2})^2,\ j - (\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{array}{c} -2 \\ = 17, \end{array} \quad \begin{array}{c} 23 \\ = 4, \end{array} \quad \begin{array}{c} -9 \\ = 10, \end{array} \quad \begin{array}{c} 32 \\ = 13, \end{array} \quad \begin{array}{c} -18 \\ = 1, \end{array}$

$\begin{array}{c} 43 \\ = 5, \end{array} \quad \begin{array}{c} -29 \\ = 9, \end{array} \quad \begin{array}{c} 56 \\ \end{array}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \begin{matrix}-2\\=17,\end{matrix}\ \begin{matrix}23\\=4,\end{matrix}\ \begin{matrix}-9\\=10,\end{matrix}\ \begin{matrix}32\\=13,\end{matrix}\ \begin{matrix}-18\\=1,\end{matrix}$

$\begin{matrix}43\\=5,\end{matrix}\ \begin{matrix}-29\\=9,\end{matrix}\ \begin{matrix}56\\=18,\end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix}-2\\=17,\end{matrix}\quad \begin{matrix}23\\=4,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-9\\=10,\end{matrix}\quad \begin{matrix}32\\=13,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-18\\=1,\end{matrix}$

$\begin{matrix}43\\=5,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-29\\=9,\end{matrix}\quad \begin{matrix}56\\=18,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-42\\ \end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix} -2 \\ = 17, \end{matrix} \quad \begin{matrix} 23 \\ = 4, \end{matrix} \quad \begin{matrix} -9 \\ = 10, \end{matrix} \quad \begin{matrix} 32 \\ = 13, \end{matrix} \quad \begin{matrix} -18 \\ = 1, \end{matrix}$

$\begin{matrix} 43 \\ = 5, \end{matrix} \quad \begin{matrix} -29 \\ = 9, \end{matrix} \quad \begin{matrix} 56 \\ = 18, \end{matrix} \quad \begin{matrix} -42 \\ = 15, \end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17,}{-2}\ \ \underset{=4,}{23}\ \ \underset{=10,}{-9}\ \ \underset{=13,}{32}\ \ \underset{=1,}{-18}$

$\underset{=5,}{43}\ \ \underset{=9,}{-29}\ \ \underset{=18,}{56}\ \ \underset{=15,}{-42}\ \ 71$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j, j+1^2, j-1^2, j+2^2, j-2^2, \ldots, j+(\frac{m-1}{2})^2, j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17}{-2},\ \underset{=4}{23},\ \underset{=10}{-9},\ \underset{=13}{32},\ \underset{=1}{-18},$

$\underset{=5}{43},\ \underset{=9}{-29},\ \underset{=18}{56},\ \underset{=15}{-42},\ \underset{=14}{71},$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \mod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17,}{-2}\ \ \underset{=4,}{23}\ \ \underset{=10,}{-9}\ \ \underset{=13,}{32}\ \ \underset{=1,}{-18}$

$\underset{=5,}{43}\ \ \underset{=9,}{-29}\ \ \underset{=18,}{56}\ \ \underset{=15,}{-42}\ \ \underset{=14,}{71}\ \ -57$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\quad 8,\quad 6,\quad 11,\quad 3,\quad 16,\quad \begin{matrix}-2\\=17,\end{matrix}\quad \begin{matrix}23\\=4,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-9\\=10,\end{matrix}\quad \begin{matrix}32\\=13,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-18\\=1,\end{matrix}$

$\begin{matrix}43\\=5,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-29\\=9,\end{matrix}\quad \begin{matrix}56\\=18,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-42\\=15,\end{matrix}\quad \begin{matrix}71\\=14,\end{matrix}\quad \begin{matrix}-57\\=0,\end{matrix}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \begin{array}{c}-2\\=17\end{array},\ \begin{array}{c}23\\=4\end{array},\ \begin{array}{c}-9\\=10\end{array},\ \begin{array}{c}32\\=13\end{array},\ \begin{array}{c}-18\\=1\end{array},$

$\begin{array}{c}43\\=5\end{array},\ \begin{array}{c}-29\\=9\end{array},\ \begin{array}{c}56\\=18\end{array},\ \begin{array}{c}-42\\=15\end{array},\ \begin{array}{c}71\\=14\end{array},\ \begin{array}{c}-57\\=0\end{array},\ 88$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17,}{-2}\ \underset{=4,}{23}\ \underset{=10,}{-9}\ \underset{=13,}{32}\ \underset{=1,}{-18}$

$\underset{=5,}{43}\ \underset{=9,}{-29}\ \underset{=18,}{56}\ \underset{=15,}{-42}\ \underset{=14,}{71}\ \underset{=0,}{-57}\ \underset{=12,}{88}$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \mod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17,}{-2}\ \ \underset{=4,}{23}\ \ \underset{=10,}{-9}\ \ \underset{=13,}{32}\ \ \underset{=1,}{-18}$

$\underset{=5,}{43}\ \ \underset{=9,}{-29}\ \ \underset{=18,}{56}\ \ \underset{=15,}{-42}\ \ \underset{=14,}{71}\ \ \underset{=0,}{-57}\ \ \underset{=12,}{88}\ \ -74$

Quadratisches Sondieren

$t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$

Sondierungsfolge:

$j,\ j+1^2,\ j-1^2,\ j+2^2,\ j-2^2, \ldots,\ j+(\frac{m-1}{2})^2,\ j-(\frac{m-1}{2})^2$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$7,\ 8,\ 6,\ 11,\ 3,\ 16,\ \underset{=17,}{-2}\ \underset{=4,}{23}\ \underset{=10,}{-9}\ \underset{=13,}{32}\ \underset{=1,}{-18}$

$\underset{=5,}{43}\ \underset{=9,}{-29}\ \underset{=18,}{56}\ \underset{=15,}{-42}\ \underset{=14,}{71}\ \underset{=0,}{-57}\ \underset{=12,}{88}\ \underset{=2}{-74}$

Quadratisches Sondieren (2)

Quadratisches Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Quadratisches Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn $m \equiv 3 \mod 4$ und m eine Primzahl ist

(Beweis: Zahlentheorie)

Quadratisches Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn $m \equiv 3 \mod 4$ und m eine Primzahl ist

(Beweis: Zahlentheorie)

Besser als lineares Sondieren, aber für großes m sind die ersten Werte noch *nah* an j

Multiplikatives Sondieren

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m - 1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$ 7

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \dots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \le i \le m-1$

Hashwerte $1, \dots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \dots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \le i \le m-1$

Hashwerte $1, \dots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84	91

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j$	70	77	84	91	98				

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$									

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7								

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14							

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2						

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9					
$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16				
$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4			

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11		

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \dots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \dots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$									

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13								

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1							

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8						

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15					

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15	3				

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i, j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15	3	10			

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15	3	10	17		

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15	3	10	17	5	

Technische Universität Braunschweig

Multiplikatives Sondieren

Hier: $h(x) = x \mod (m-1) + 1$ und damit in $\{1, \ldots, m-1\}$

$t(i,j) := i \cdot j \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Hashwerte $1, \ldots, m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $j = h(x) = 7$

Sondierungsfolge:

$i \cdot j$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$i \cdot j \mod 19$	7	14	2	9	16	4	11	18	6

$i \cdot j$	70	77	84	91	98	105	112	119	126
$i \cdot j \mod 19$	13	1	8	15	3	10	17	5	12

Multiplikatives Sondieren (2)

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m - 1$ mit

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m-1$ mit

$$i_1 \cdot j \equiv i_2 \cdot j \mod m$$

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m - 1$ mit

$$
\begin{aligned}
& i_1 \cdot j \equiv i_2 \cdot j \mod m \\
\Rightarrow \quad & j \cdot (i_2 - i_1) \equiv 0 \mod m
\end{aligned}
$$

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m - 1$ mit

$$\begin{aligned} & i_1 \cdot j \equiv i_2 \cdot j \mod m \\ \Rightarrow\quad & j \cdot (i_2 - i_1) \equiv 0 \mod m \\ \Rightarrow\quad & j \cdot (i_2 - i_1) \text{ ist Vielfaches von } m \end{aligned}$$

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m-1$ mit

$$\begin{aligned} & i_1 \cdot j \equiv i_2 \cdot j \mod m \\ \Rightarrow \quad & j \cdot (i_2 - i_1) \equiv 0 \mod m \\ \Rightarrow \quad & j \cdot (i_2 - i_1) \text{ ist Vielfaches von } m \\ \Rightarrow \quad & \text{Primfaktorzerlegung von } j \cdot (i_2 - i_1) \text{ muss } m \text{ enthalten} \end{aligned}$$

Multiplikatives Sondieren (2)

Frage: Ist $t(\cdot, j)$ für alle j und m bijektiv?

Nein, aber immer wenn m Primzahl und $j \neq 0$

Beweis: Durch Widerspruch!

Falls nicht, gibt es $1 \leq i_1 < i_2 \leq m-1$ mit

$$\begin{aligned} & i_1 \cdot j \equiv i_2 \cdot j \mod m \\ \Rightarrow\ & j \cdot (i_2 - i_1) \equiv 0 \mod m \\ \Rightarrow\ & j \cdot (i_2 - i_1) \text{ ist Vielfaches von } m \\ \Rightarrow\ & \text{Primfaktorzerlegung von } j \cdot (i_2 - i_1) \text{ muss } m \text{ enthalten} \end{aligned}$$

Widerspruch zu $1 \leq j \leq m-1$, $1 \leq i_2 - i_1 \leq m-1$

Doppeltes Hashing

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1, 15,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2)+1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1, 15, 10,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1, 15, 10, 5,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1, 15, 10, 5, 0,

Doppeltes Hashing

Sei $h_1(x) \equiv x \mod m$ und $h_2(x) \equiv x \mod (m-2) + 1$.

i-te Position für x: $h_1(x) + i \cdot h_2(x) \mod m$, $1 \leq i \leq m-1$

Beispiel: $m = 19$ und $x = 47$

$h_1(47) \equiv 47 \mod 19 = 9$ und $h_2(47) \equiv 47 \mod 17 + 1 = 14$

Sondierungsfolge:

9, 4, 18, 13, 8, 3, 17, 12, 7, 2, 16, 11, 6, 1, 15, 10, 5, 0, 14

Doppeltes Hashing (2)

Doppeltes Hashing (2)

Beobachtung:

$i \cdot h_2(x)$ durchläuft für $1 \leq i \leq m-1$ die Werte $1, \ldots, m-1$ in irgendeiner Reihenfolge, ergänzt wird $0 = 0 \cdot h_2(x)$

Doppeltes Hashing (2)

Beobachtung:

$i \cdot h_2(x)$ durchläuft für $1 \leq i \leq m-1$ die Werte $1, \ldots, m-1$ in irgendeiner Reihenfolge, ergänzt wird $0 = 0 \cdot h_2(x)$

Durch den Summanden $h_1(x)$ wird der Anfang zufällig verschoben.

Doppeltes Hashing (2)

Beobachtung:

$i \cdot h_2(x)$ durchläuft für $1 \leq i \leq m-1$ die Werte $1, \ldots, m-1$ in irgendeiner Reihenfolge, ergänzt wird $0 = 0 \cdot h_2(x)$

Durch den Summanden $h_1(x)$ wird der Anfang zufällig verschoben.

Doppeltes Hashing kommt dem idealen Hashing am nächsten.

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Auch die beste Hashfunktion kann Kollisionen nicht ganz vermeiden, deshalb sind Hashverfahren im *Worst Case* ineffiziente Realisierungen der Operationen search, insert, delete.

Zusammenfassung

- Auch die beste Hashfunktion kann Kollisionen nicht ganz vermeiden, deshalb sind Hashverfahren im *Worst Case* ineffiziente Realisierungen der Operationen search, insert, delete.
- Im Durchschnitt sind sie jedoch weitaus effizienter als Verfahren, die auf Schlüsselvergleichen basieren.

Zusammenfassung

- Auch die beste Hashfunktion kann Kollisionen nicht ganz vermeiden, deshalb sind Hashverfahren im *Worst Case* ineffiziente Realisierungen der Operationen search, insert, delete.
- Im Durchschnitt sind sie jedoch weitaus effizienter als Verfahren, die auf Schlüsselvergleichen basieren.
- Die Anzahl benötigter Schritte zum Suchen, Einfügen und Entfernen hängt (im Durchschnitt) im wesentlichen vom Belegungsfaktor, d.h. dem Verhältnis von Anzahl aktueller Schlüssel zur Größe der Hashtabelle, ab.

7.7 Kryptographie

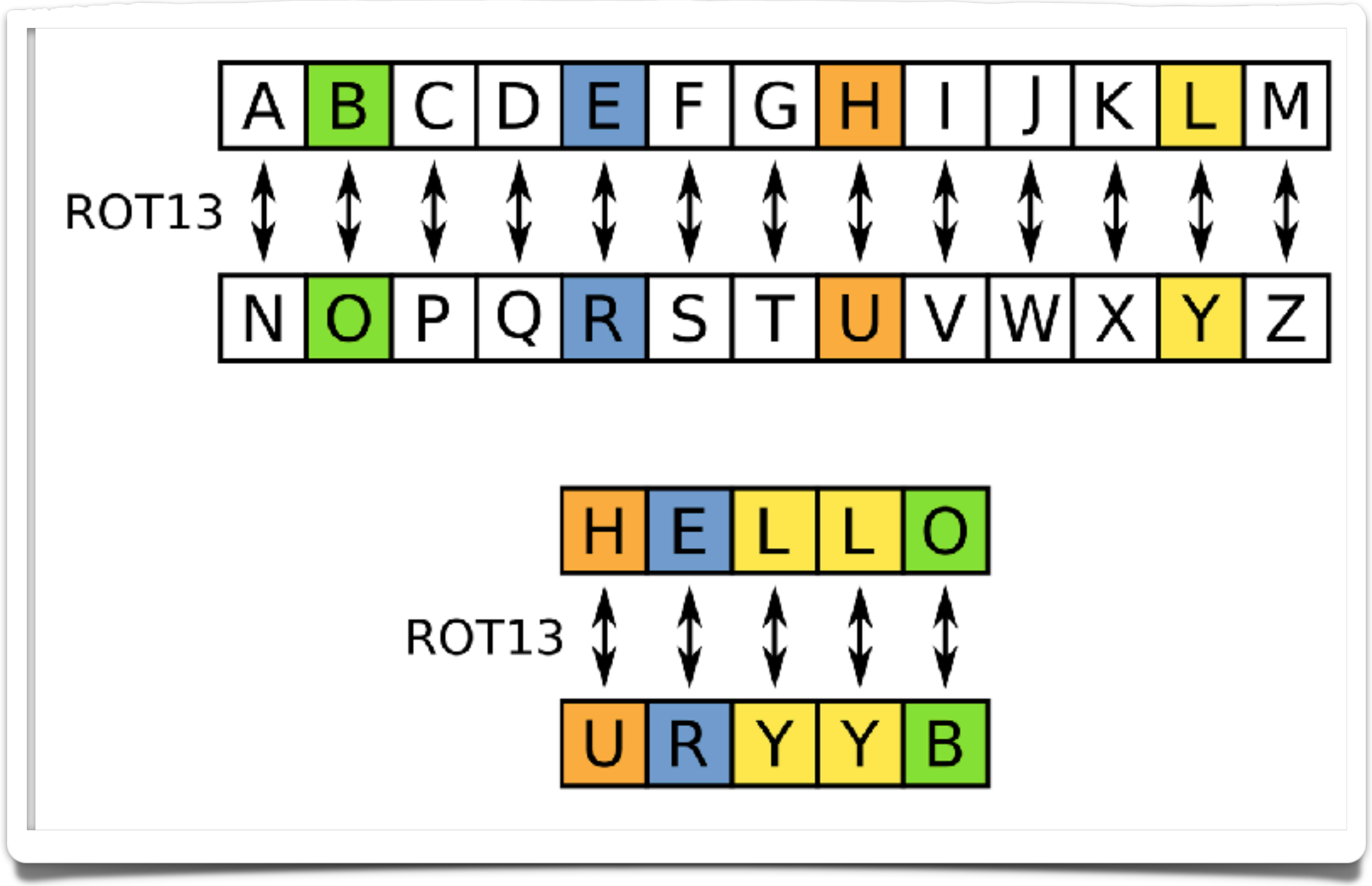
Veränderte Ziele

Veränderte Ziele

- Text codieren:

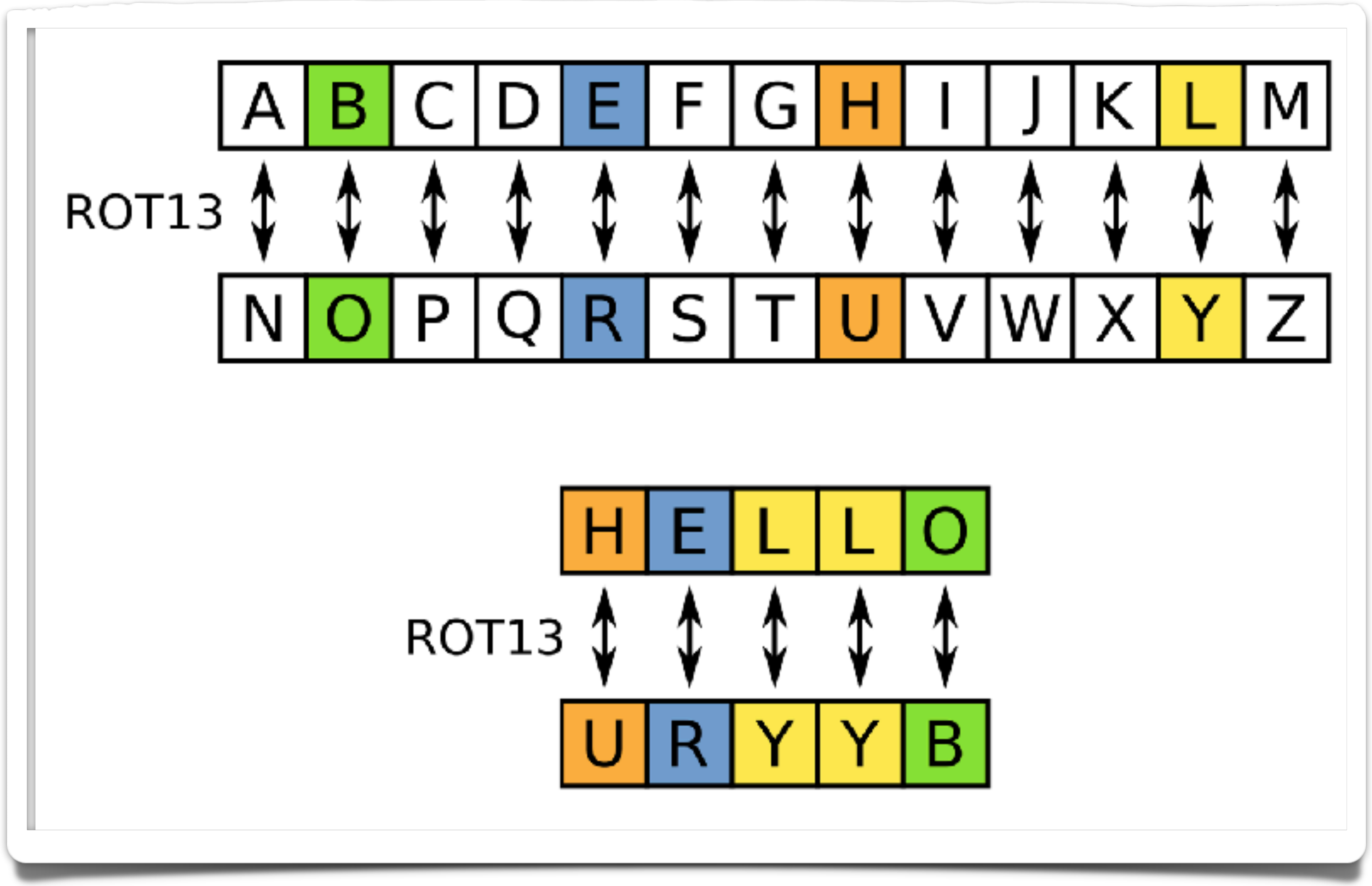
Veränderte Ziele

- Text codieren:



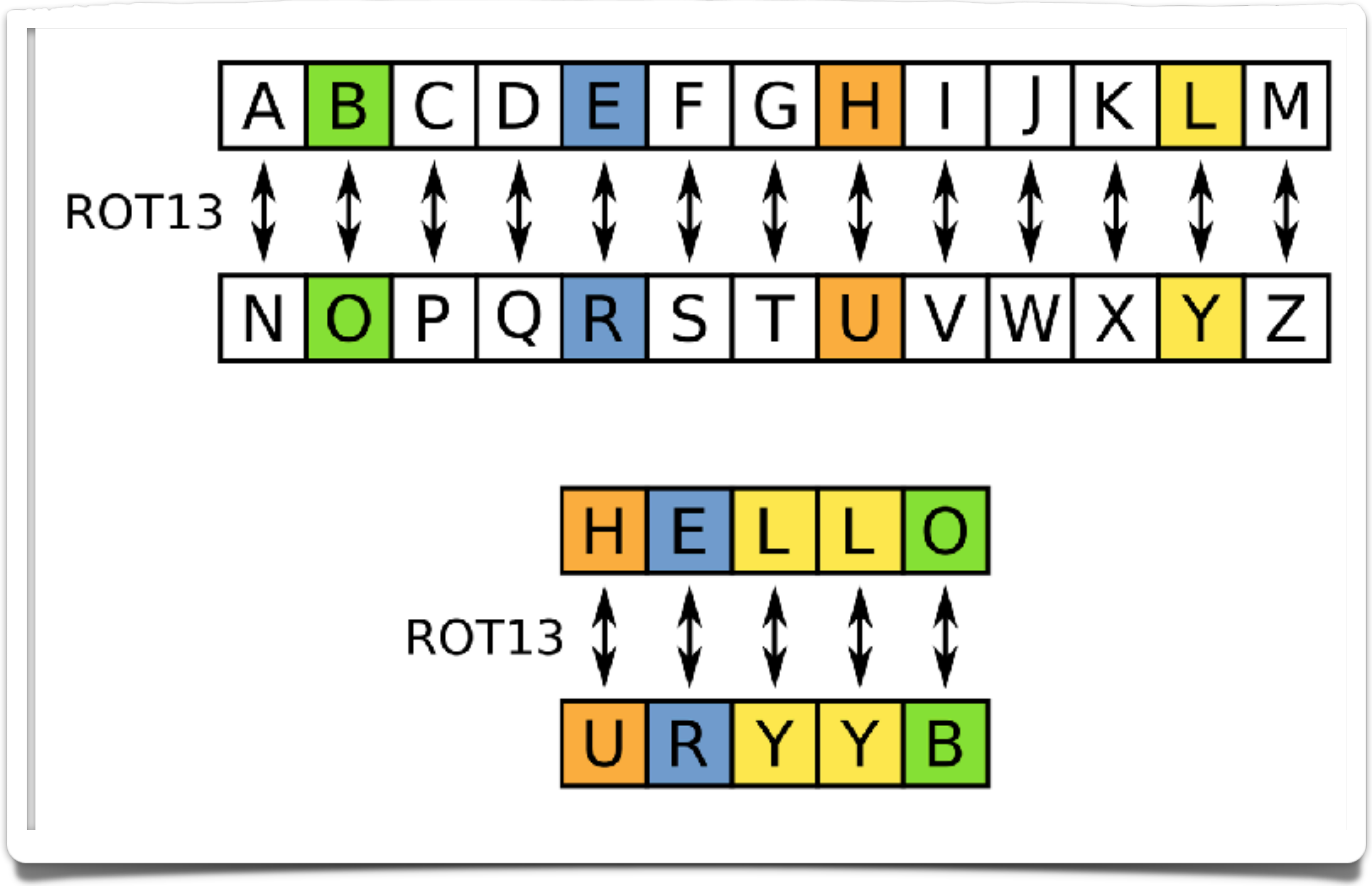
Veränderte Ziele

- Text codieren:
  1. Berechtigter Empfänger soll Nachricht entschlüsseln können.



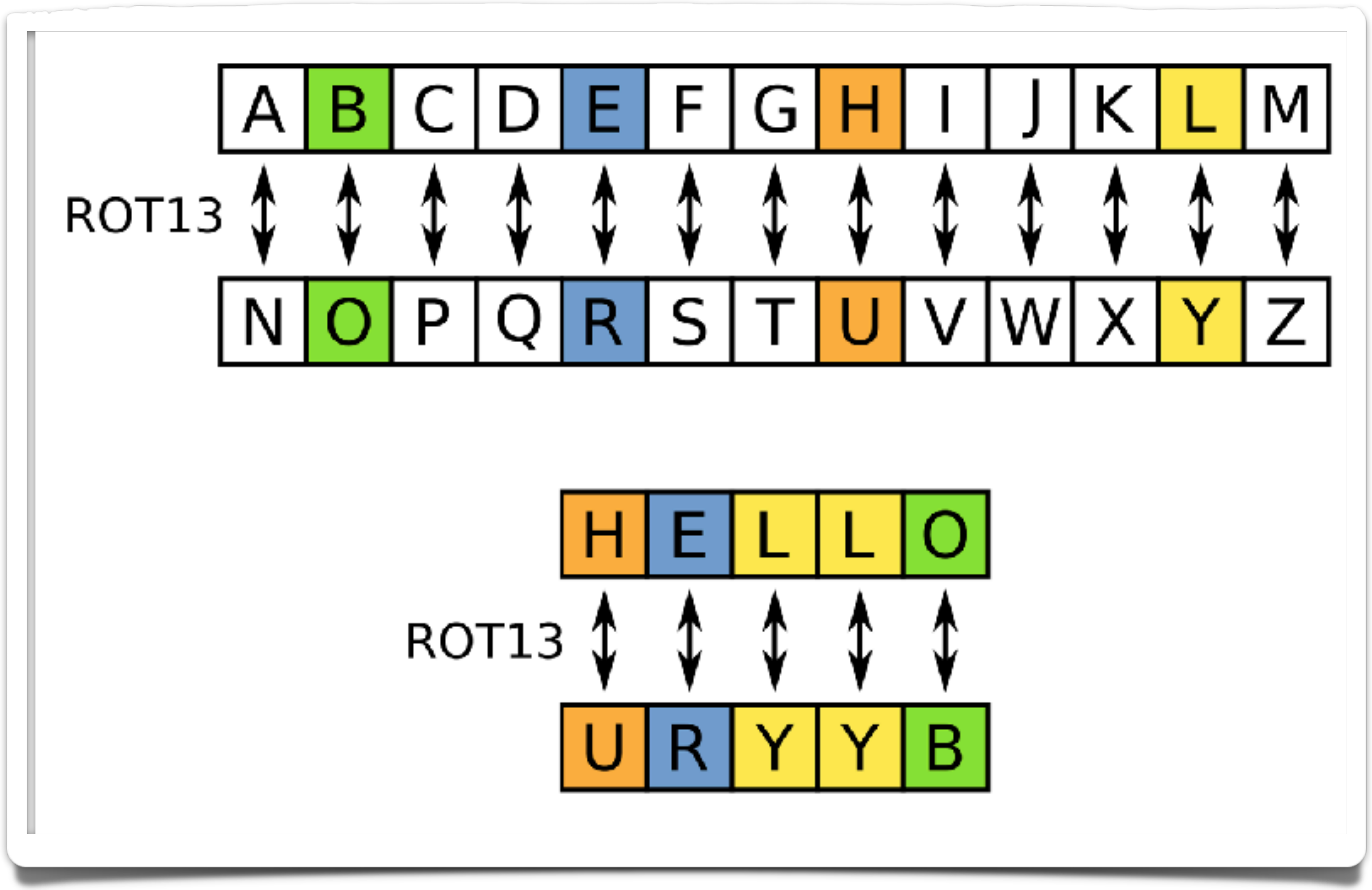
Veränderte Ziele

- Text codieren:
  1. Berechtigter Empfänger soll Nachricht entschlüsseln können.
  2. Unberechtigter Empfänger soll Nachricht nicht entschlüsseln können.



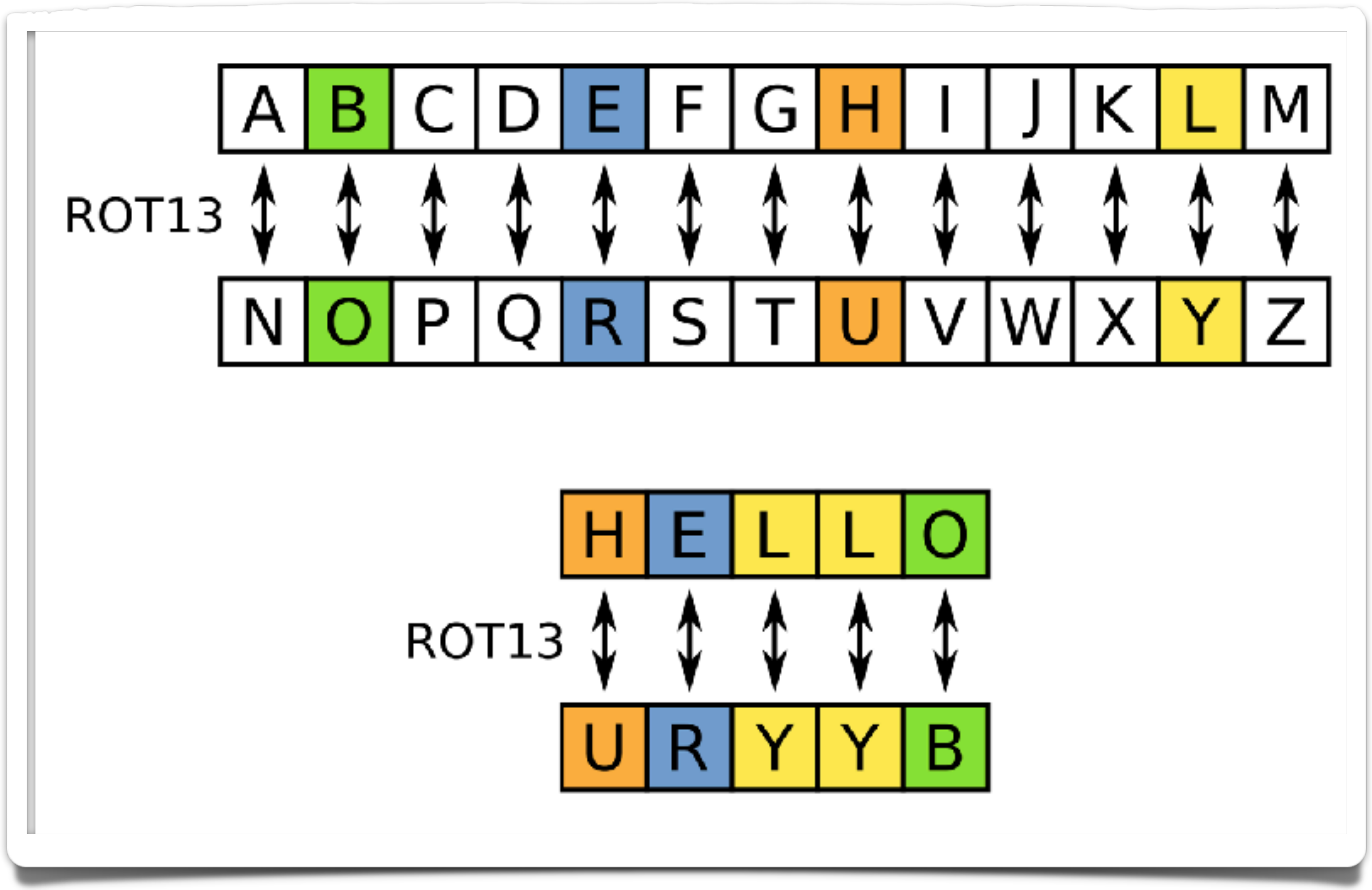
Veränderte Ziele

- Text codieren:
  1. Berechtigter Empfänger soll Nachricht entschlüsseln können.
  2. Unberechtigter Empfänger soll Nachricht nicht entschlüsseln können.



Veränderte Ziele

- Text codieren:
  1. Berechtigter Empfänger soll Nachricht entschlüsseln können.
  2. Unberechtigter Empfänger soll Nachricht nicht entschlüsseln können.



Veränderte Ziele

Veränderte Ziele

- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.

Veränderte Ziele

- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.
- Hashwert lässt sich schnell berechnen.

Veränderte Ziele

- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.
- Hashwert lässt sich schnell berechnen.
- SEHR schwer eine Nachricht mit demselben Hashwert zu generieren.

Veränderte Ziele

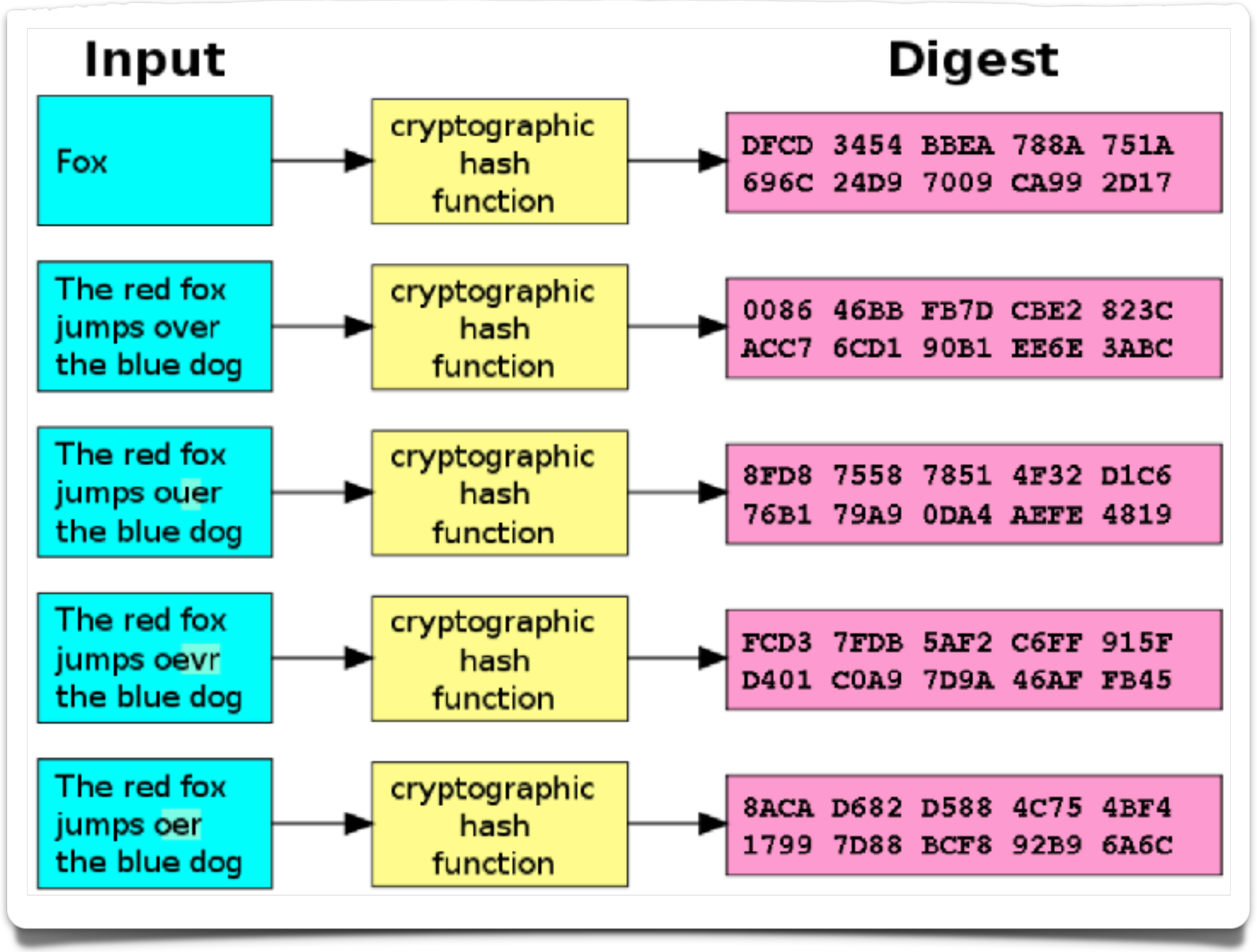
- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.
- Hashwert lässt sich schnell berechnen.
- SEHR schwer eine Nachricht mit demselben Hashwert zu generieren.
- SEHR schwer zwei Nachrichten mit demselben Hashwert zu finden.

Veränderte Ziele

- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.
- Hashwert lässt sich schnell berechnen.
- SEHR schwer eine Nachricht mit demselben Hashwert zu generieren.
- SEHR schwer zwei Nachrichten mit demselben Hashwert zu finden.
- Ein kleine Änderung in der Nachricht ändert das Ergebnis so stark, dass man aus den Hashwerten nicht auf ähnliche Nachrichten schließen kann.

Veränderte Ziele

- Deterministisch, d.h. dieselbe Nachricht ergibt immer den selben Wert.
- Hashwert lässt sich schnell berechnen.
- SEHR schwer eine Nachricht mit demselben Hashwert zu generieren.
- SEHR schwer zwei Nachrichten mit demselben Hashwert zu finden.
- Ein kleine Änderung in der Nachricht ändert das Ergebnis so stark, dass man aus den Hashwerten nicht auf ähnliche Nachrichten schließen kann.

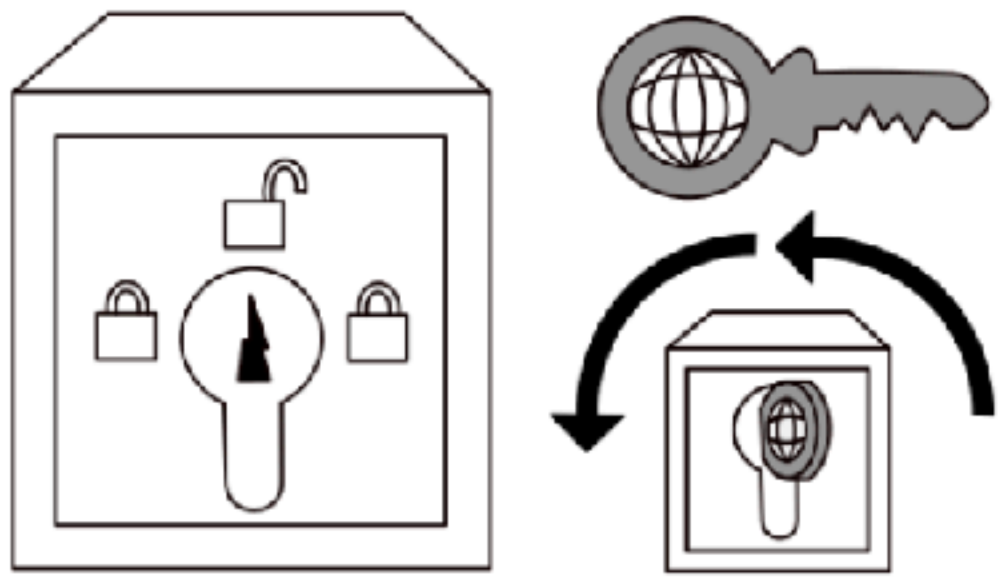


PUBLIK KEY KRYPTO

PUBLIK KEY KRYPTO

PUBLIK KEY KRYPTO

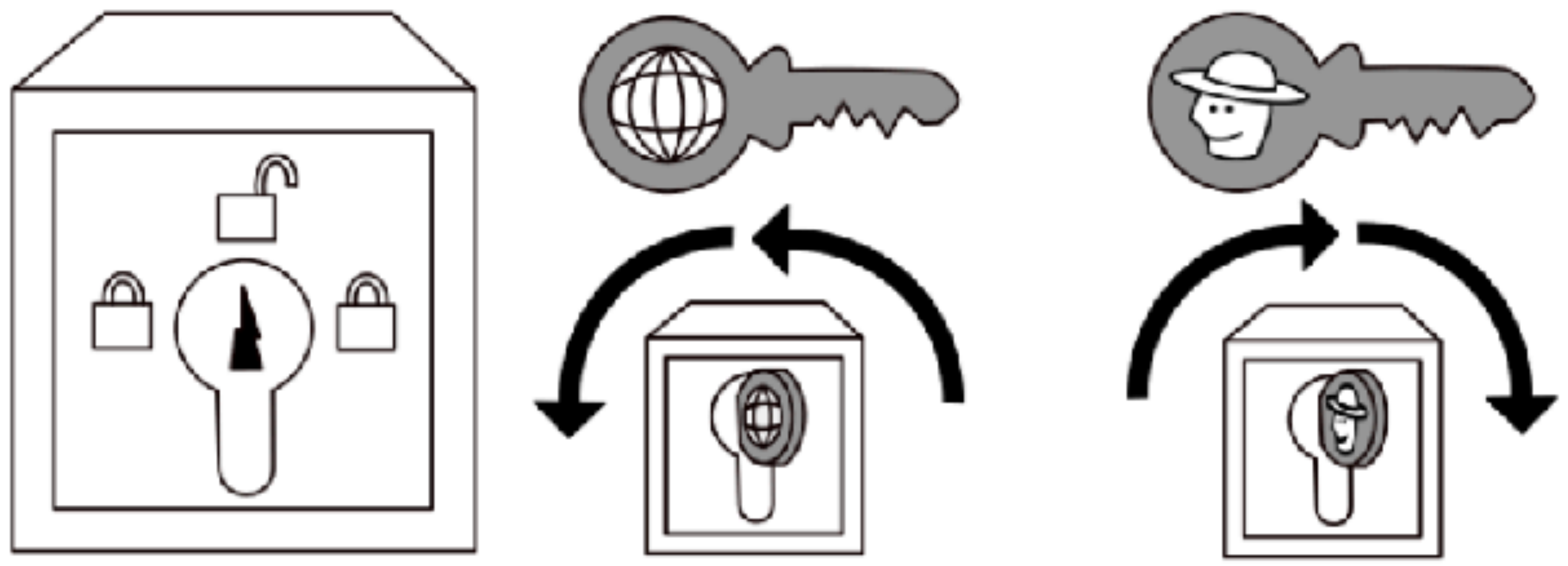
PUBLIK KEY KRYPTO



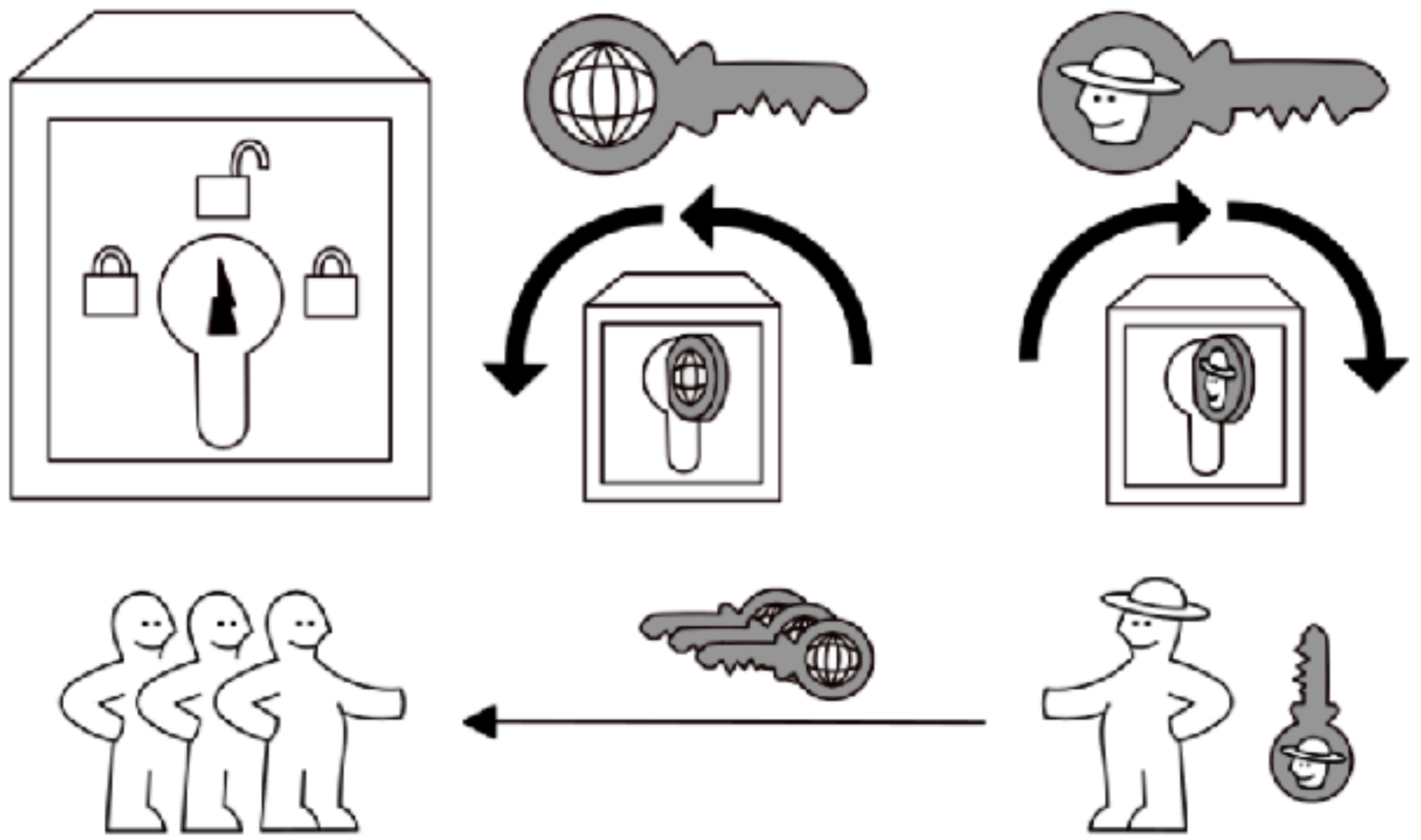
PUBLIK KEY KRYPTO

idea-instructions.com/public-key/

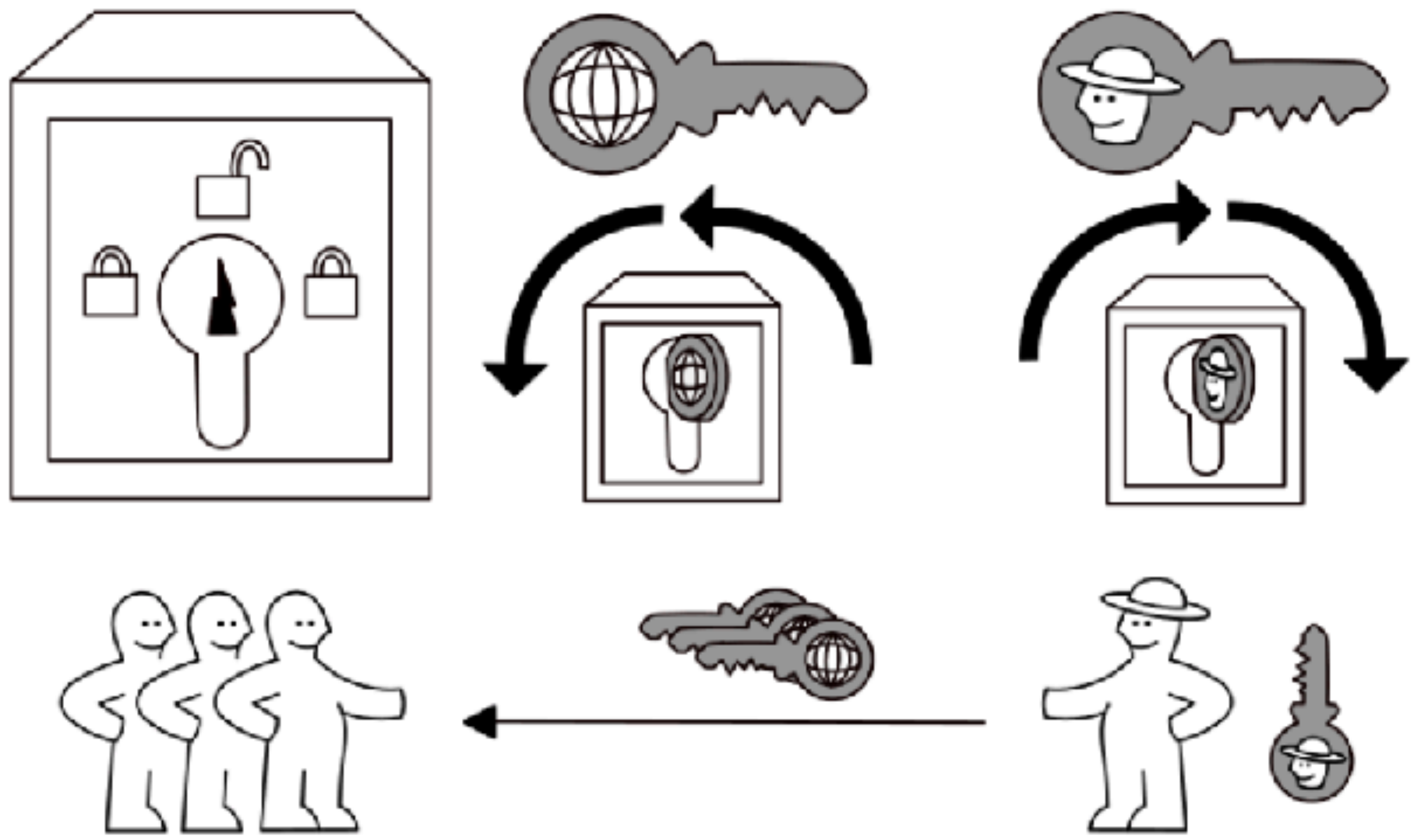
IDEA



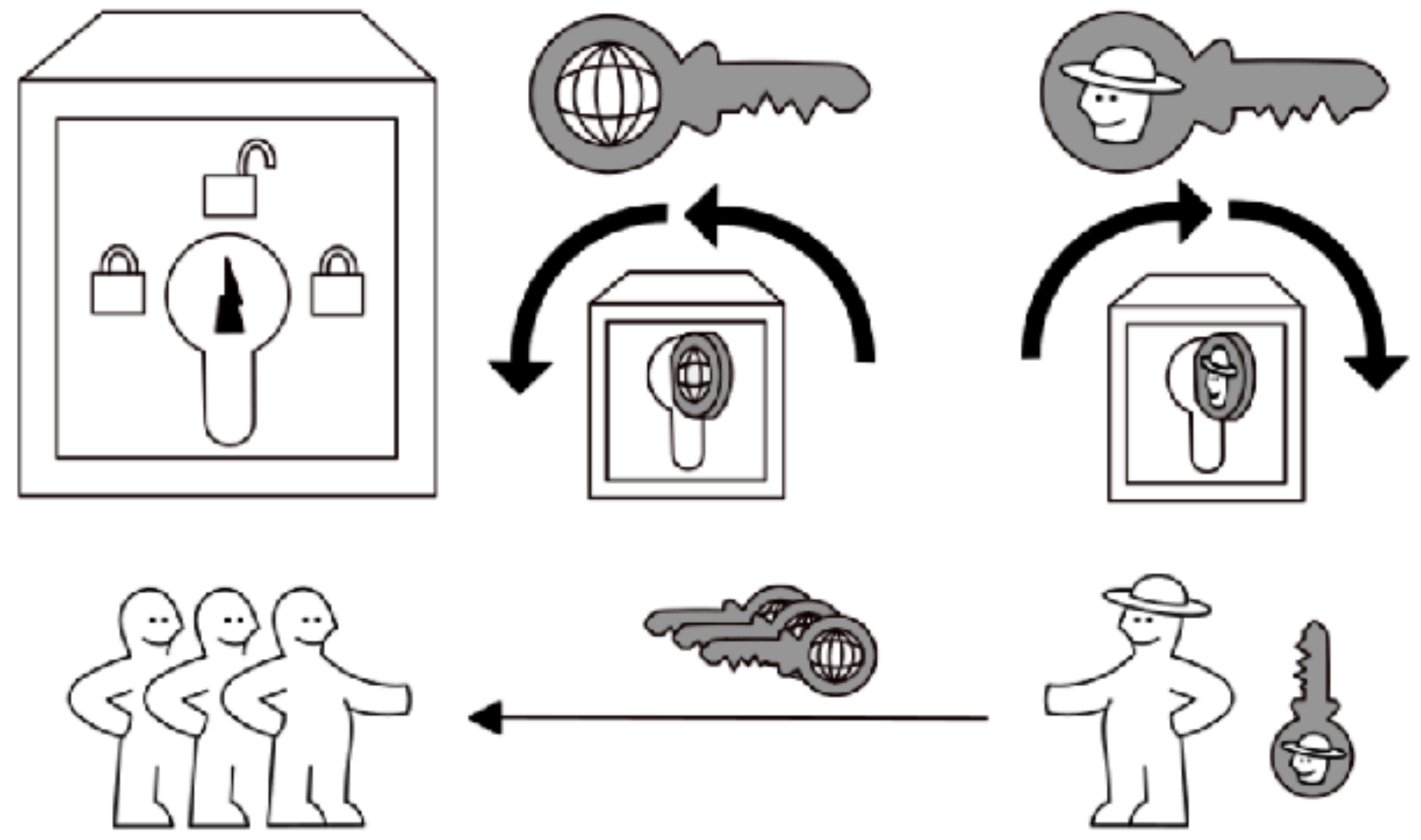
PUBLIK KEY KRYPTO



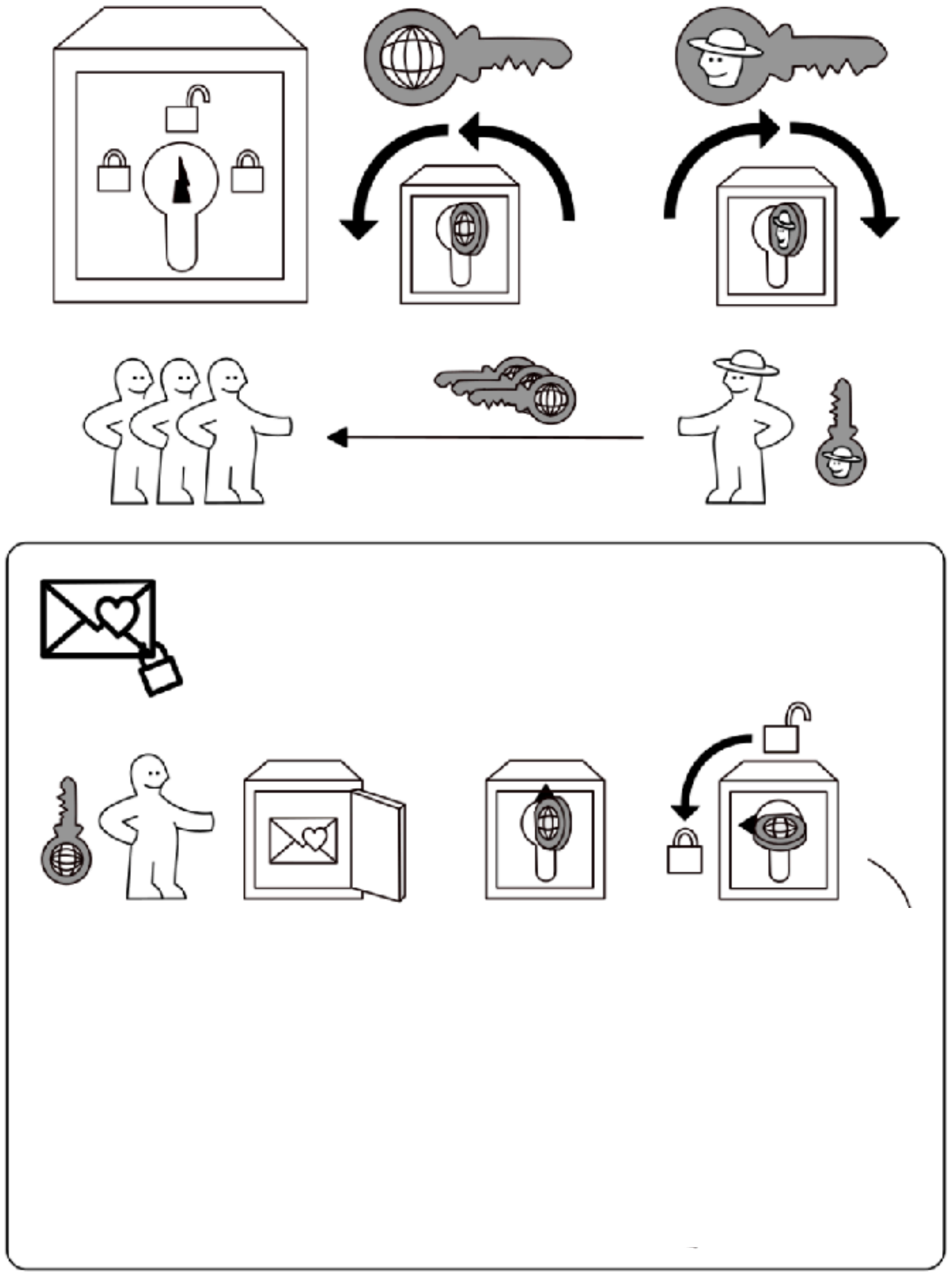
PUBLIK KEY KRYPTO



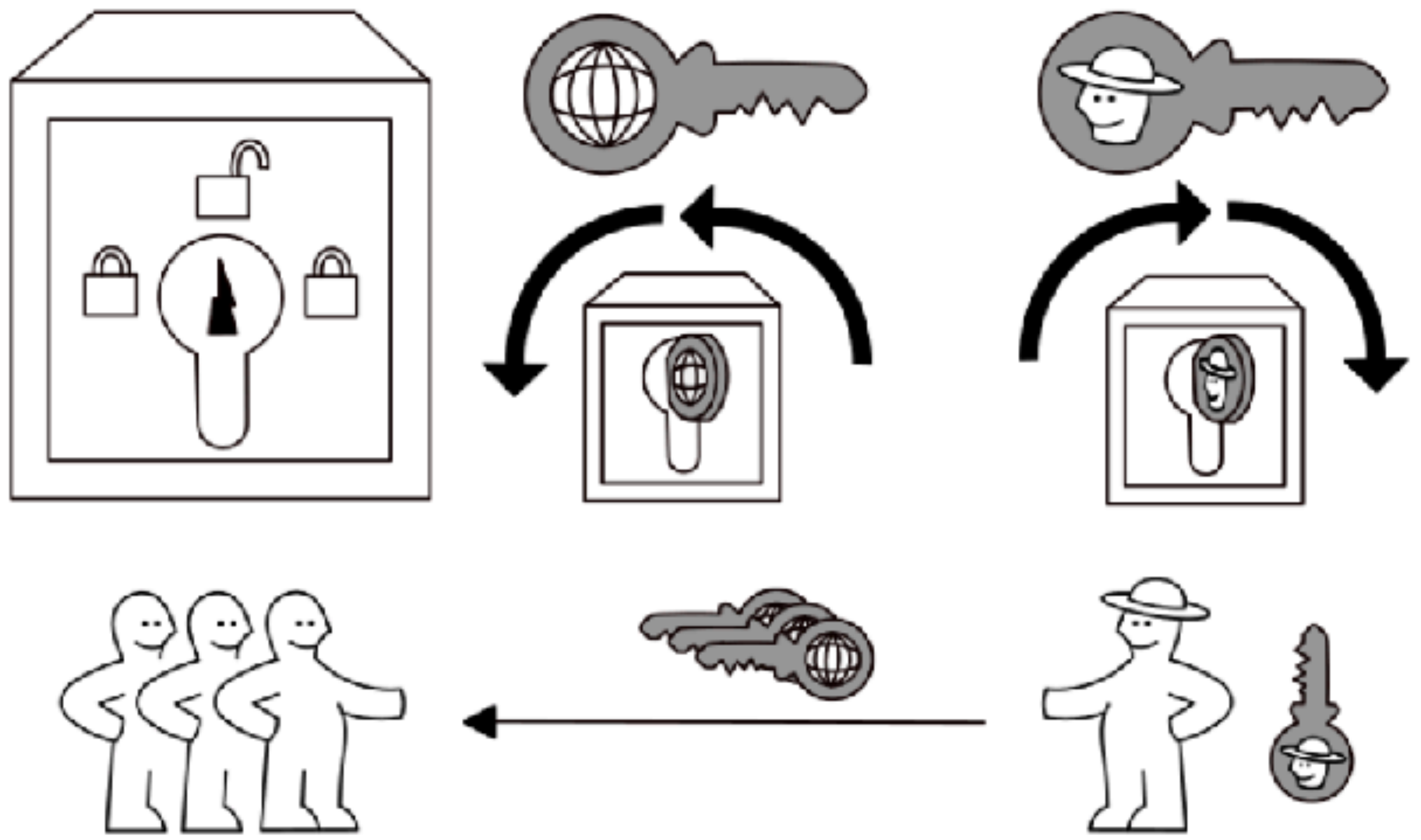
PUBLIK KEY KRYPTO

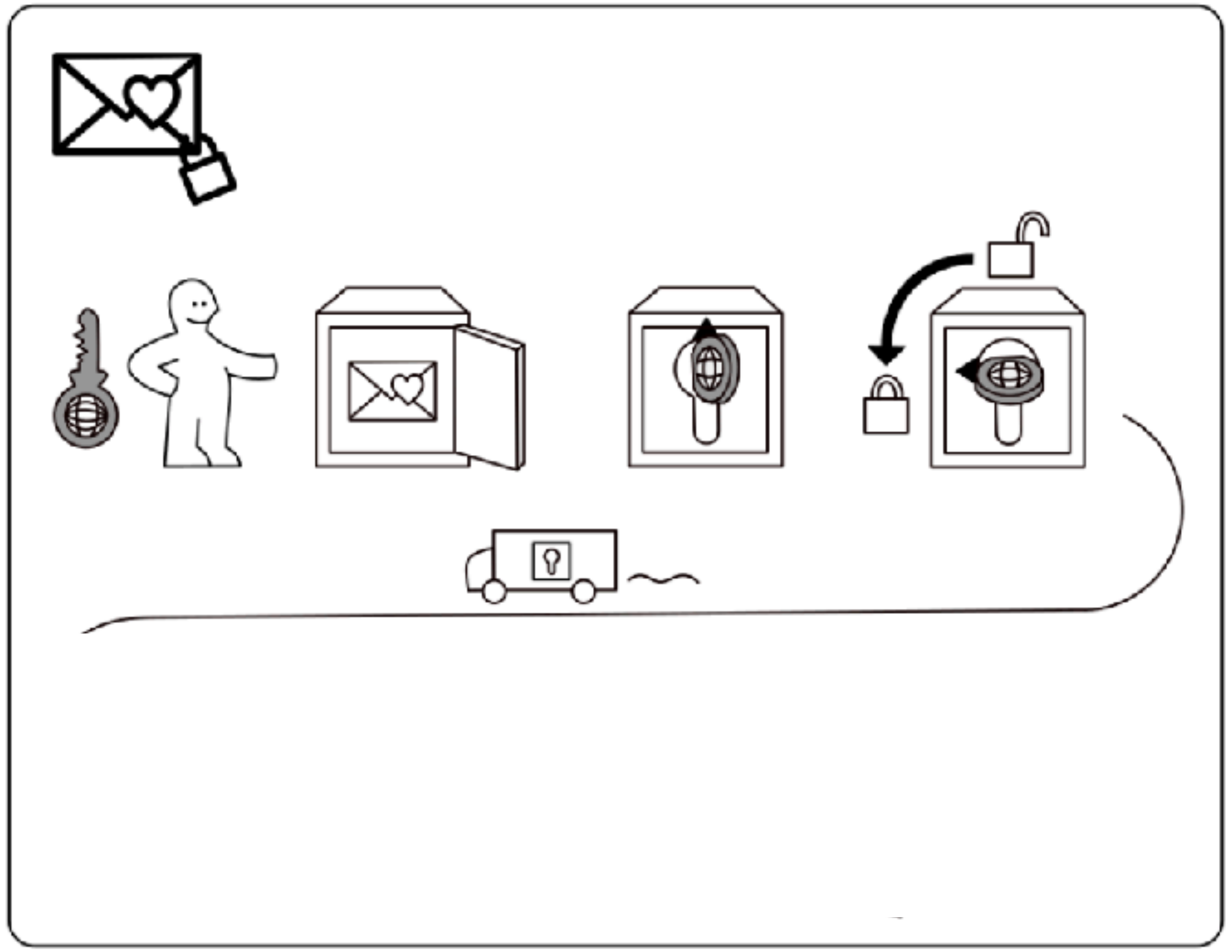


PUBLIK KEY KRYPTO



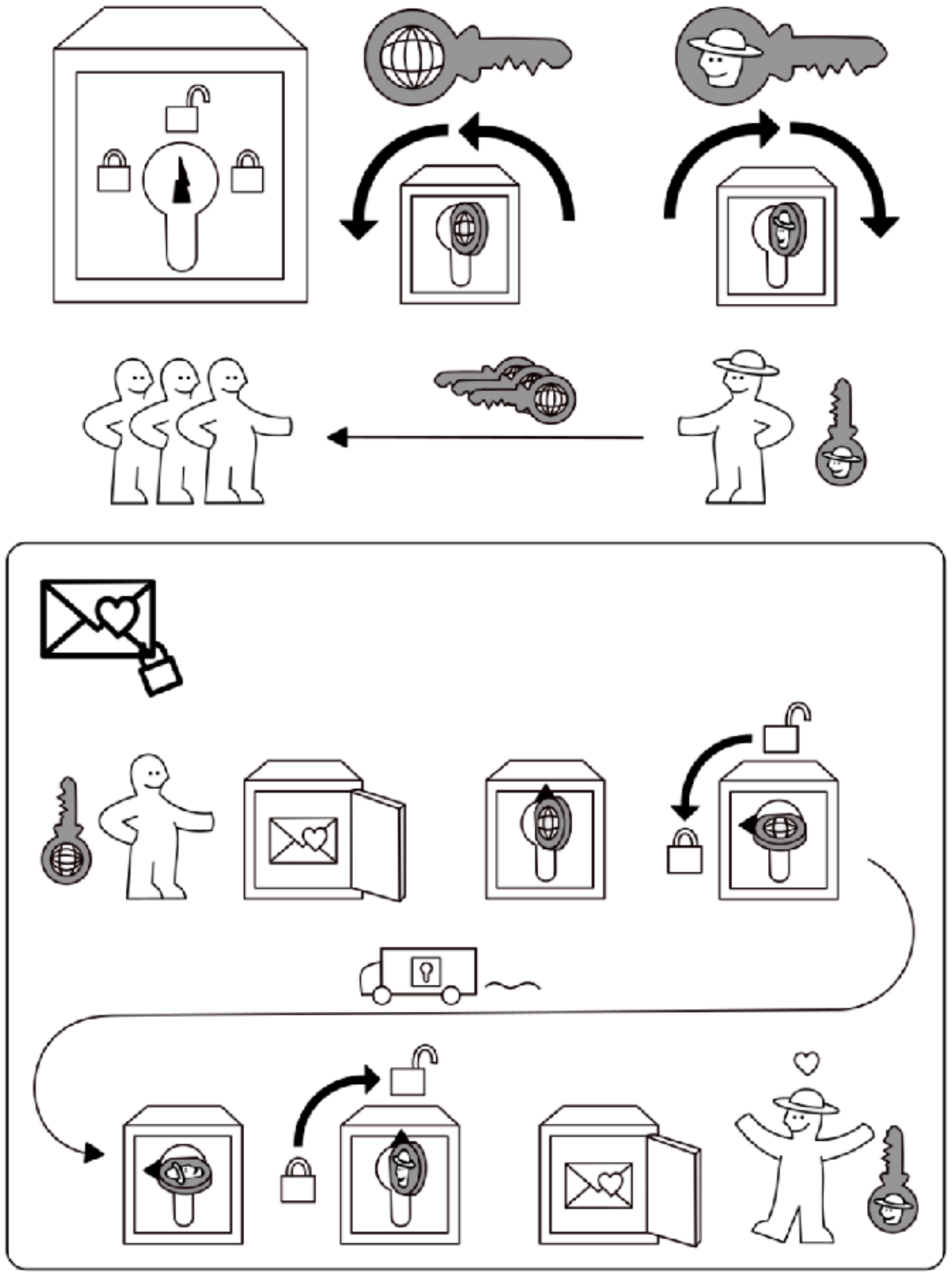
PUBLIK KEY KRYPTO



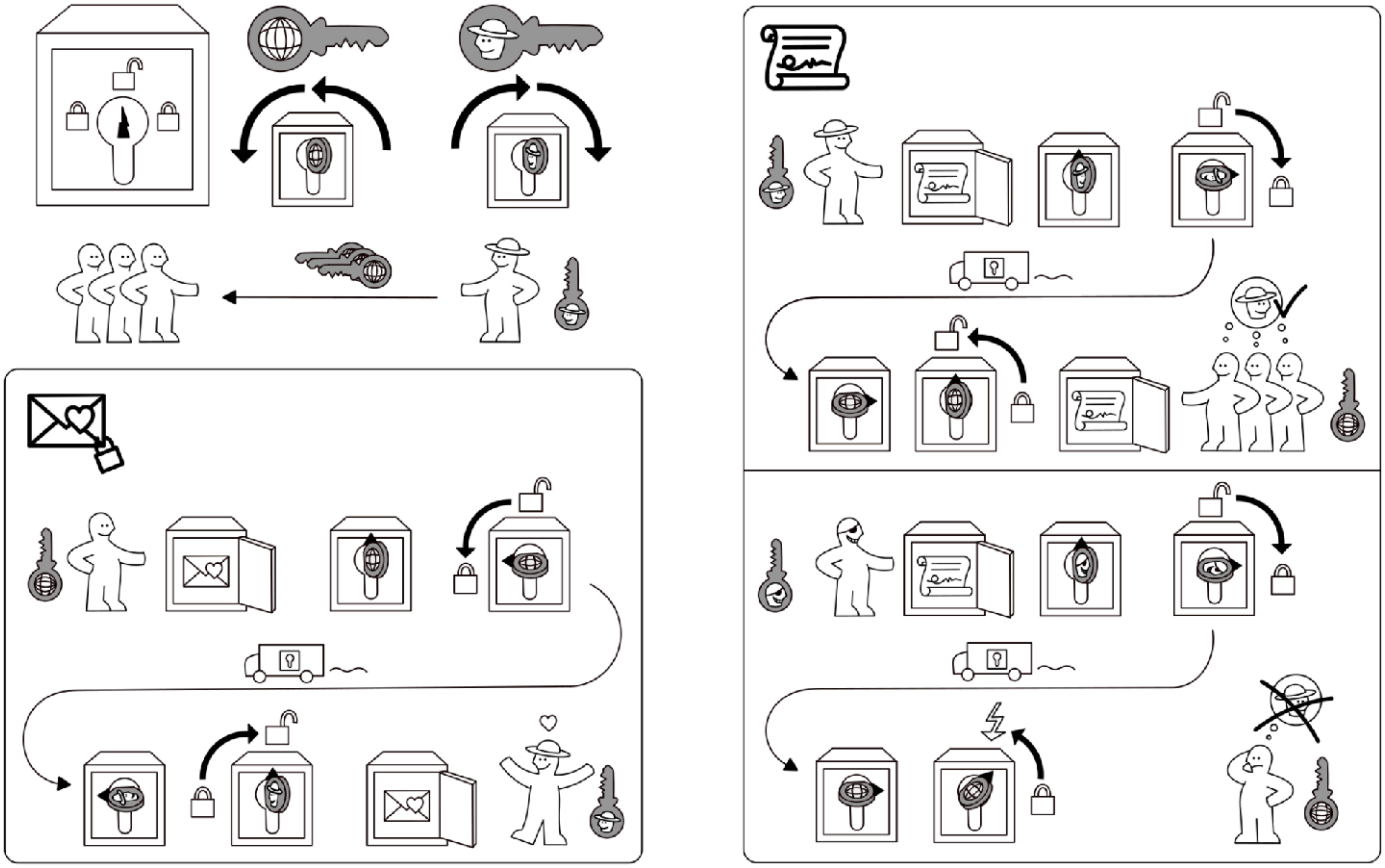


PUBLIK KEY KRYPTO

IDEA



PUBLIK KEY KRYPTO



Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de