Algorithmen und Datenstrukturen 2 **Sommer 2024**

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Ramin Kosfeld
Chek-Manh Loi

Präsenzblatt 3

Dieses Blatt dient lediglich der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben und ihrer Lösungen erfolgt in den kleinen Übungen in der Woche vom 27.05.2024.

Präsenzaufgabe 1:
In dieser Aufgabe betrachten wir den Branch-and-Bound-Algorithmus für MAXIMUM KNAPSACK aus der Vorlesung. Wir benutzen dabei GREEDY_0 (siehe Blatt 1) als untere Schranke und den Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK als obere Schranke.

Sei $I := (z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$ ein Instanz von MAXIMUM KNAPSACK.

a) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Nimm weiterhin an, dass diese Teilbelegung zulässig ist. Sei $U := UB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **obere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt U **immer** als obere Schranke?

b) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Sei $P := LB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **untere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt P **immer** als untere Schranke?

c) Der Entscheidungsbaum, den der Branch-and-Bound-Algorithmus ablaufen kann, besitzt $2^{n+1} - 1$ viele Knoten. Da der Algorithmus Teilbäume abschneidet, besteht die Hoffnung, dass deutlich weniger Knoten besucht werden müssen.

   Zeige: Für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Instanz mit n Objekten, bei der der Branch-and-Bound-Algorithmus mindestens $2^{\frac{n}{2}} - 1$ Knoten des gesamten Entscheidungsbaumes besucht.
   (Hinweis: Ein Entscheidungsbaum der Höhe h besitzt $2^h - 1$ Knoten. Finde also eine Instanz für jedes n, sodass alle Knoten auf den ersten $\frac{n}{2}$ Ebenen besucht werden müssen.)