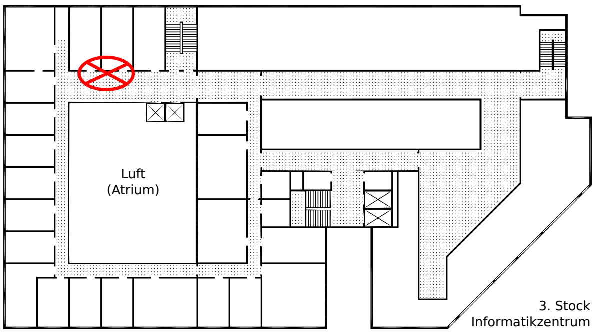
Algorithmen und Datenstrukturen 2 **Sommer 2024**

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Ramin Kosfeld
Chek-Manh Loi

Abgabe: 19.06.2024
Rückgabe: ab 24.06.2024

Hausaufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 19.06.2024 um 13:30 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Auf deine Abgabe unbedingt Namen, Matrikelnummer und deine Gruppennummer schreiben! Die Blätter bitte zusammenheften!**



Hausaufgabe 1 (Greedy$_k$): **(7 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus Greedy$_k$ aus der Vorlesung. Wende Greedy$_k$ auf die folgende Instanz an und gib die beste gefundene Lösung an.

i	1	2	3	4
z_i	16	5	20	8
p_i	41	12	40	14

mit $Z = 28$ und $k = 2$

Gib dazu für jede betrachtete fixierte Teilmenge $\overline{S}$ der Objekte die folgenden Mengen bzw. Werte in einer Tabelle an.

- $\overline{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \overline{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.
  Falls die in $\overline{S}$ ausgewählten Elemente die Restkapazität überschreiten, trage hier jeweils anstelle des Wertes ein $\times$ ein.
- G_k: Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S: Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Betrachte (analog zum Beispiel aus der großen Übung) fixierte Mengen $\overline{S}$ mit weniger Elementen *vor* Mengen mit mehr Elementen. Für zwei fixierte Mengen der gleichen Größe M_1, M_2 betrachte M_1 vor M_2, falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$ (lexikografische Sortierung).

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X, die nicht in Y vorkommen. Wir betrachten also $M_1 = \{1, 2\}$ vor $M_2 = \{1, 3\}$, weil das kleinste Element von $M_1 \setminus M_2 = \{2\}$ kleiner ist als das kleinste Element von $M_2 \setminus M_1 = \{3\}$.)

Hausaufgabe 2 (3-Satisfiability): **(4+1 Punkte)**

Betrachte das Problem 3-SAT aus der Vorlesung und die folgende Instanz.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

a) Transformiere die 3-SAT-Instanz in eine Instanz von 0-1-Knapsack, indem du die Reduktion aus der Vorlesung nutzt. (Hinweis: Einen Pseudocode für diese Reduktion gibt es im Skript.)

b) Gib eine Belegung für die Variablen $x_1, \dots x_4$ an, die die gegebene Instanz erfüllt.

Hausaufgabe 3 (Approximation mit Greedy$_0$): **(1+2+1+1+3 Punkte)**

Wir betrachten den Algorithmus Greedy$_0$ für Instanzen mit folgenden Eigenschaften: (A) jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, (B) die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

Sei das $(k+1)$-ste Objekt das erste Objekt, welches Greedy$_0$ nicht aufnimmt und sei OPT der optimale Lösungswert.

a) Zeige: $\sum_{i=1}^{k} z_i > \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot Z$

b) Zeige: $(\alpha - 1)p_{k+1} \leq \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$
(Hinweis: Nutze a))

c) Zeige: $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \leq \text{OPT}$

d) Zeige: $\text{OPT} \leq \sum\limits_{i=1}^{k+1} p_i$

e) Zeige: Greedy$_0$ liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (A) und (B) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$-Approximation. (Hinweis: Nutze b), c) und d).)