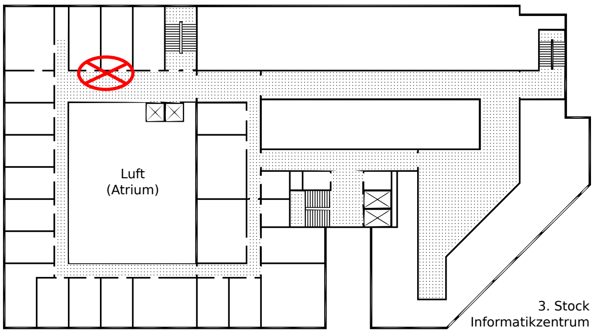
Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Ramin Kosfeld
Chek-Manh Loi

Abgabe: 15.05.2024
Rückgabe: ab 27.05.2024

Hausaufgabenblatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 15.05.2024 um 13:30 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Auf deine Abgabe unbedingt Namen, Matrikelnummer und deine Gruppennummer schreiben! Die Blätter bitte zusammenheften!**



Hausaufgabe 1 (Wechselgeld): **(2+3+4 Punkte)**

Wir möchten einen Verkaufsautomaten programmieren, der das Wechselgeld mit möglichst wenig Münzen zurückgibt. Formal:

Gegeben: Eine Zahl $W \in \mathbb{N}$ und Münzwerte $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_m$.

Gesucht: Nicht-negative, ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_m$, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} x_i M_i = W \text{ und}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \text{ minimal.}$$

Algorithmus 1 zeigt einen Greedy-Algorithmus, der möglichst hochwertige Münzen priorisiert.

```
function CHANGE(W, M_1, ..., M_m)
    for i = m down to 1 do
        x_i := ⌊W / M_i⌋                ▷ Nimm Münze i so oft wie möglich.
        W := W − x_i · M_i
    return x_1, ..., x_m
```

Algorithmus 1: Ein Greedy-Algorithmus, der möglichst wenig Münzen Wechselgeld zurückgeben soll.

a) Algorithmus 1 ist tatsächlich optimal für manche Währungssysteme, zum Beispiel den Euro. Das Euro-Währungssystem besitzt die folgenden Münztypen: 1-, 2-, 5-, 10-, 20-, 50-, 100- und 200-Cent-Münzen. Gibt Algorithmus 1 weiterhin stets die minimale Anzahl an Münzen zurück, wenn zusätzlich 25-Cent-Münzen (wie die vom US-Dollar bekannten *quarters*) eingeführt werden? Begründe Deine Antwort.

b) Sei nun $\text{OPT}(i, x)$ der minimale Wert, wie viele der ersten i Münzen benötigt werden, um den Wert x zu erreichen. Gib eine Rekursionsgleichung an, die $\text{OPT}(i, x)$ für ein Währungssystem mit Münzen im Wert von $1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_m$ bestimmt.

c) Zeige: Wenn M_{i+1} für alle $1 \leq i < m$ ohne Rest durch M_i teilbar ist, dann ist Algorithmus 1 optimal.
Hinweis: Angenommen, Z sei der zu erreichende Wert und $Z > M_j$ für ein $2 \leq j \leq m$. Wie oft kann man jede Münze M_i mit $i < j$ maximal verwenden? Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$ für alle Folgen a_i (Teleskopsumme).

Hausaufgabe 2 (Subset Sum): **(3+2 Punkte)**

a) Wende das dynamische Programm für Subset Sum aus der Vorlesung auf folgende Instanz an:

$$\begin{array}{c|ccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline z_i & 7 & 2 & 2 & 3 & 6 \end{array} \text{ und } Z = 13.$$

Fülle dazu die folgende Tabelle aus, wobei der Eintrag in Zeile i und Spalte x dem Wert $\mathcal{S}(x, i)$ entspricht.

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0														
1														
2														
3														
4														
5														

b) Wie kann das dynamische Programm für Subset Sum verwendet werden, um Partition zu lösen?

Hausaufgabe 3 (Münzspiel): **(1+5 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes Zwei-Spieler-Spiel: Auf einem Tisch liegen n Münzen im Wert von $M_1, \ldots, M_n$ in einer Reihe. Zwei Spieler, nennen wir sie Alice und Bob, ziehen nun abwechselnd eine Münze von einem der beiden Enden der Münzreihe. Sieger ist der Spieler, der am Ende einen größeren Gesamtmünzwert besitzt (bei Gleichstand gewinnt Alice). Beispiel:

$$2, 5, 1, 10, 50, 2, 2, 10$$

Alice wählt zunächst die (rechte) 10 und Bob danach eine 2 von rechts. Es bleibt über:

$$2, 5, 1, 10, 50, 2$$

Wählt Alice nun die rechte 2, kann Bob die Münze mit Wert 50 einstecken. Daher nimmt Alice die linke Münze. Da Bob die 50 nicht Alice überlassen möchte, wählt dieser die linke Münze. Es bleibt über:

$$1, 10, 50, 2$$

Alice merkt, dass sie definitiv die 50 einstecken wird, wenn sie die 1 für sich beansprucht. Bob muss dann die 10 oder 2 einstecken, wodurch die 50 frei wird. Das Spiel neigt sich nach weiteren Ziehungen zu Ende und die beiden Spieler haben folgende Münzen gewählt:

Alice: 10, 2, 1, 50; Bob: 2, 5, 10, 2. Es steht 63 zu 19; ein klarer Sieg für Alice.

Alice sucht nun nach einer Strategie, mit der sie immer gewinnt, sofern es eine Möglichkeit gibt, ihren Sieg zu erzwingen. Wir nehmen an, dass Alice immer mit dem Ziehen beginnt.

a) Gib eine Instanz an (mit Begründung), bei der Alice ihren Sieg nicht erzwingen kann.

b) Sei $\textsc{opt}(i, j)$ der beste Wert, den ein Spieler erzwingen kann, wenn zu Beginn seines Zuges die Münzen M_i bis M_j auf dem Tisch liegen.

  (i) Konstruiere eine Rekursionsgleichung, die $\textsc{opt}(i, j)$ berechnet. (Hinweis: Betrachte zusätzlich zu $\textsc{opt}(i, j)$ die Summe C_{ij} der Münzwerte der Münzen von i bis j.Von diesem Wert wird der Gegenspieler so wenig wie möglich übrig lassen!)

  (ii) Welchen Wert muss $\textsc{opt}(1, n)$ mindestens haben, damit Alice eine Gewinnstrategie hat?