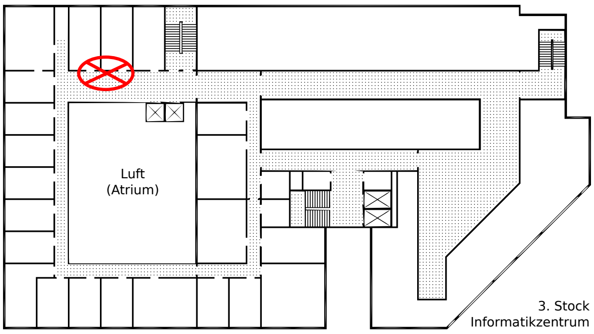
Algorithmen und Datenstrukturen 2 | **SoSe 2022**
Prof. Dr. Sándor Fekete
Matthias Konitzny
Abgabe: 17.05.22
Rückgabe: ab 25.05.22

Hausaufgabenblatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 17.05.22 um 16:00 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit beiden Namen, Matrikel- Übungs- und Gruppennummer versehen!**



Hausaufgabe 1 (Fractional Knapsack): (5+4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Fractional Knapsack.

a) Sei $Z = 30$, und seien die sieben Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	6	7	10	4	8	5	9
p_i	2	7	11	7	6	4	5

Wende den Greedy-Algorithmus für Fractional Knapsack aus der Vorlesung auf diese Instanz an. Gib in jeder Iteration den aktuellen Gegenstand, den Anteil x_i zu dem er gepackt wird, sowie den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an.

b) Angenommen jedes Objekt steht beliebig oft zur Verfügung, d.h., für n Objekte $(z_1, p_1), \ldots (z_n, p_n)$ sind Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ maximal.

Gib einen Algorithmus an, der das Problem optimal in Zeit $O(n)$ löst (d.h. insbesondere, dass er ohne Sortieren auskommt). Begründe außerdem kurz die Korrektheit deines Algorithmus.

Hausaufgabe 2 (Maximum Knapsack): (6+5 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Maximum Knapsack. Um dieses Problem zu lösen, wandeln wir den Algorithmus für Fractional Knapsack aus der Vorlesung folgendermaßen ab: Wir sortieren die Objekte aufsteigend nach $\frac{z_i}{p_i}$. Dann gehen wir die Objekte der Sortierung entsprechend durch und packen ein Objekt in den Rucksack, falls es hineinpasst. Eine formale Beschreibung ist in Algorithmus 1 zu sehen. Wir nennen diesen Algorithmus Greedy$_0$.

function $\text{Greedy}_0(z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$
    Sortiere Objekte nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend; dies ergibt Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
    for $j := 1$ **to** n **do**
        if $\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} + z_{\pi(j)} \leq Z\right)$ **then**
            $x_{\pi(j)} := 1$
        else
            $x_{\pi(j)} := 0$
    return $x_1, \ldots, x_n$

Algorithmus 1: Greedy_0

a) Sei $Z = 15$, und seien die fünf Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5
z_i	5	8	7	4	6
p_i	1	8	6	5	7

Wende Greedy_0 auf diese Instanz an. Entscheide in jeder Iteration, ob der aktuelle Gegenstand gepackt wird und gib den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an. Ist die erhaltene Lösung optimal? Begründe deine Antwort!

b) Zeige: Die ganzzahlige Lösung P_G von Greedy_0 kann beliebig weit von einer optimalen Lösung P_{OPT} entfernt sein, d.h.: Für jedes $0 < c \leq 1$ gibt es eine Instanz, sodass $0 < \frac{P_G}{P_{OPT}} < c$.
(Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass $z_i < Z$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.)