Korrektheit

Zu zeigen: (Vor und) nach jeder Iteration gilt

(a) Für alle $x \in R$, $y \in V \setminus R$ gilt $l(x) \leq l(y)$

(b) Für alle $x \in R$ gilt:

- $l(x)$ ist die Länge eines kürzesten sx-Pfades in D.
- Ist $l(x) < \infty$, dann ex. sx-Pfad P in D[R] mit Kosten $l(x)$ und $(p(x), x) \in P$.

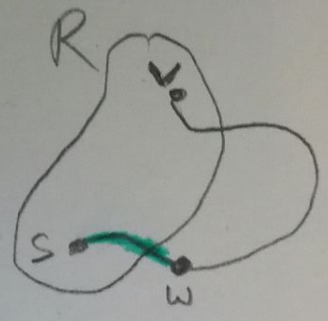
(c) Für alle $w \in V \setminus R \setminus \{s\}$ gilt:

- $l(w)$ ist die Länge eines kürzesten sw-Pfades in $D[R \cup \{w\}]$
- Ist $l(w) < \infty$, dann ist $p(w) \in R$ und $l(w) = l(p(w)) + c((p(w), w))$

Zunächst: Alle Aussagen gelten vor der 1. Iteration.

Zu (a):

- Vor Iteration gilt $l(x) \leq l(y)$, $\forall x \in R \setminus \{v\}$, $y \in V \setminus R \cup \{v\}$
- Nach Zeile 6 gilt $l(v) \leq l(y)$, $\forall y \in V \setminus R$



Sei $w \in V \setminus R$ der erste Knoten auf P außerhalb von R.

Da $\underline{P[s,w]} \subseteq D[R \setminus \{v\} \cup \{w\}]$

folgt mit (c):

$$\ell(w) \leq c(P(s,w)) \leq c(P) < \ell(v) \quad \lightning$$

$c(e) \geq 0, \forall e \in A$

Alg hätte w gewählt.

Zu c): Sei $y \in V \setminus R$

Ann: $\exists$ sy-Pfad P in $D[R \cup \{y\}]$ mit $c(P) < \ell(y)$

Dabei gilt:

- $x :=$ Vorgänger von y auf P ist in R
- $\ell(y) \leq \ell(x) + c((x,y))$ (Zeile 9)
- $\ell(x)$ ist die Länge eines kürzesten sx-Pfades in D
- P enthält sx-Pfad plus Kante (x,y)

$\Rightarrow c(P) = \ell(x) + c((x,y)) \geq \ell(y) \quad \lightning$

Damit gelten (a), (b) und (c) jeweils am Ende jeder Iteration, also auch am Ende $\Rightarrow$ Algo ist korrekt. $\square$

- Da $c(e) \geq 0, \forall e \in A$ gilt, ist wenn $l(y)$ verbessert wird

$$l(y) = l(v) + c((v,y)) \geq l(v)$$

$$\Rightarrow l(x) \leq l(y) \quad \forall x \in R,\ y \in V \setminus R.$$

(b): v wird zu R hinzugefügt

Vor der Iteration gilt (b) und (c).

$l(x)$ ist die Länge eine kürzesten sx-Pfads für alle $x \in R \setminus \{v\}$

$l(v)$ ist Länge eines kürzesten sv-Pfades in $D[R \cup \{v\}]$

$\Rightarrow$ Es bleibt zu zeigen, dass $l(v)$ die Länge eines kürzesten sv-Pfades in D ist, d.h. es gibt keinen kürzeren Weg über Knoten aus $V \setminus R$.

Ann: $\exists$ sv-Pfad P in D mit $c(P) < l(v)$