Hausaufgabenblatt 4

Die Abgabe der Lösungen muss bis zum 29.06.21 um 23:59 Uhr erfolgen. Lösungen müssen per Mail in einer PDF-Datei (Dateiname „`blatt_[nr]_[name1]_[name2]_[grpnr].pdf`“) an die/den jeweilige*n Tutor*in geschickt werden. Email-Adressen sind unter `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/index.html` zu finden.

Hausaufgabe 1 (Greedy$_k$): **(8 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus Greedy$_k$ aus der Vorlesung. Wende Greedy$_k$ auf die folgende Instanz an.

i	1	2	3	4
z_i	12	10	16	9
p_i	14	10	15	6

mit $Z = 26$ und $k = 2$

Gib dazu die folgenden Mengen bzw. Werte in jeder Iteration tabellarisch an:

- $\overline{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \overline{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.
- G_k: Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S: Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Achte darauf, dass M mit einer kleinsten Menge anfängt und mit einer größten Menge endet. Zusätzlich soll M lexikographisch sortiert sein: Für zwei gleichgroße Mengen M_1 und M_2 kommt M_1 vor M_2, falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$.

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X, die nicht in Y vorkommen.)

Hausaufgabe 2 (Approximation mit Greedy_0): (3+1+1+3+4 Punkte)

Wir betrachten den Algorithmus Greedy_0 für Instanzen mit folgenden Eigenschaften: (A) Jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, (B) Die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

a) Sei das $(k+1)$-ste Objekt das erste Objekt, welches Greedy_0 nicht aufnimmt und sei OPT der optimale Lösungswert.

   (i) Zeige: $(\alpha - 1)p_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$

   (ii) Zeige: $\sum_{i=1}^{k} p_i \leq \text{OPT}$

   (iii) Zeige: $\text{OPT} \leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i$

   (iv) Zeige: Greedy_0 liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (A) und (B) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$-Approximation. (Hinweis: Nutze (i)-(iii).)

b) Zeige: Der Approximationsfaktor ist bestmöglich. D.h., für jedes α und für jedes c mit $1 - \frac{1}{\alpha} < c \leq 1$ ist Greedy_0 auf diesen Instanzen keine c-Approximation.