Algorithmen und Datenstrukturen 2 **SoSe 2021**
Prof. Dr. Sándor Fekete **Abgabe:** 11.05.21
Matthias Konitzny **Rückgabe:** ab 17.05.21

Hausaufgabenblatt 1

Die Abgabe der Lösungen muss bis zum 11.05.21 um 23:59 Uhr erfolgen. Lösungen müssen per Mail in einer PDF-Datei (Dateiname „`blatt_[nr]_[name1]_[name2]_[grpnr].pdf`“) an die/den jeweilige*n Tutor*in geschickt werden. Email-Adressen sind unter `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/index.html` zu finden.

Hausaufgabe 1 (Fractional Knapsack): **(5+4 Punkte)**
In dieser Aufgabe betrachten wir Fractional Knapsack.

a) Sei $Z = 46$, und seien die sieben Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	9	12	18	10	6	16	15
p_i	6	9	8	12	5	10	15

Wende den Greedy-Algorithmus für Fractional Knapsack aus der Vorlesung auf diese Instanz an. Gib in jeder Iteration den aktuellen Gegenstand, den Anteil x_i zu dem er gepackt wird, sowie den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an.

b) Sei I eine Instanz von Maximum Knapsack und P_{OPT} der optimale Lösungswert. Sei P_F der optimale Lösungswert, wenn I als eine Instanz von Fractional Knapsack interpretiert wird. Zeige: $P_{\text{OPT}} \leq P_F$

Hausaufgabe 2 (Maximum Knapsack): **(6+5 Punkte)**
In dieser Aufgabe betrachten wir Maximum Knapsack. Um dieses Problem zu lösen, wandeln wir den Algorithmus für Fractional Knapsack aus der Vorlesung folgendermaßen ab: Wir sortieren die Objekte aufsteigend nach $\frac{z_i}{p_i}$. Dann gehen wir die Objekte der Sortierung entsprechend durch und packen ein Objekt in den Rucksack, falls es hineinpasst. Eine formale Beschreibung ist in Algorithmus 1 zu sehen. Wir nennen diesen Algorithmus Greedy_0.

function $\text{Greedy}_0(z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$
  Sortiere Objekte nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend; dies ergibt Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
  for $j := 1$ **to** n **do**
    if $\left(\sum_{i=1}^{j-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} + z_{\pi(j)} \leq Z\right)$ **then**
      $x_{\pi(j)} := 1$
    else
      $x_{\pi(j)} := 0$
  return $x_1, \ldots, x_n$

Algorithmus 1: Greedy_0

a) Sei $Z = 35$, und seien die fünf Objekte mit folgenden Werten gegeben:

i	1	2	3	4	5
z_i	13	16	14	8	19
p_i	8	15	15	10	19

Wende $\text{G}\textsc{reedy}_0$ auf diese Instanz an. Entscheide in jeder Iteration, ob der aktuelle Gegenstand gepackt wird und gib den Gesamtzustand (aktueller Gesamtwert und aktuelles Gesamtgewicht) an. Ist die erhaltene Lösung optimal? Begründe deine Antwort!

b) Zeige: Die ganzzahlige Lösung P_G von $\text{G}\textsc{reedy}_0$ kann beliebig weit von einer optimalen Lösung P_{OPT} entfernt sein, d.h.: Für jedes $0 < c \leq 1$ gibt es eine Instanz, sodass $0 < \frac{P_G}{P_{OPT}} < c$.
(Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass $z_i < Z$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.)