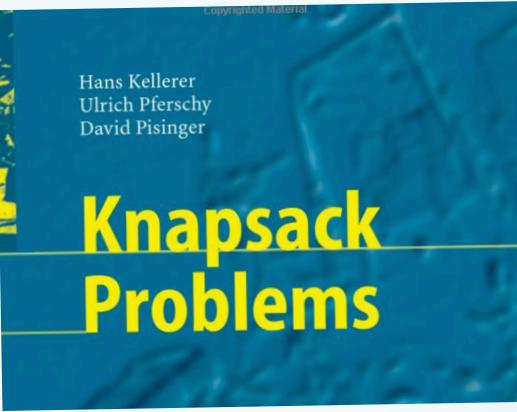


$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ & \text{subject to} && \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ & && x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$



# 1 Einführung: Knapsack-Probleme

*Algorithmen und Datenstrukturen 2  
Sommer 2020*

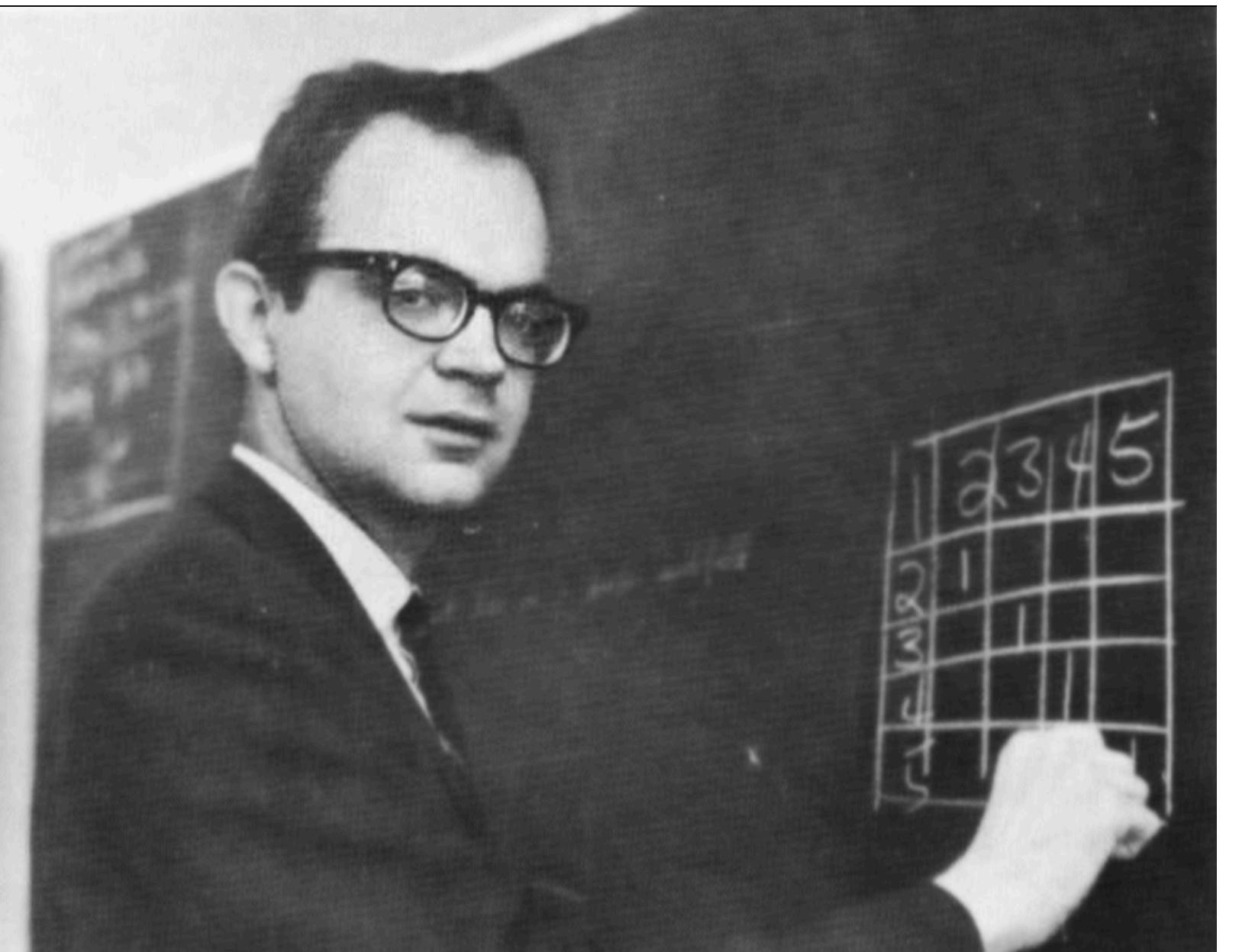
Prof. Dr. Sándor Fekete

# Eine Klausursituation

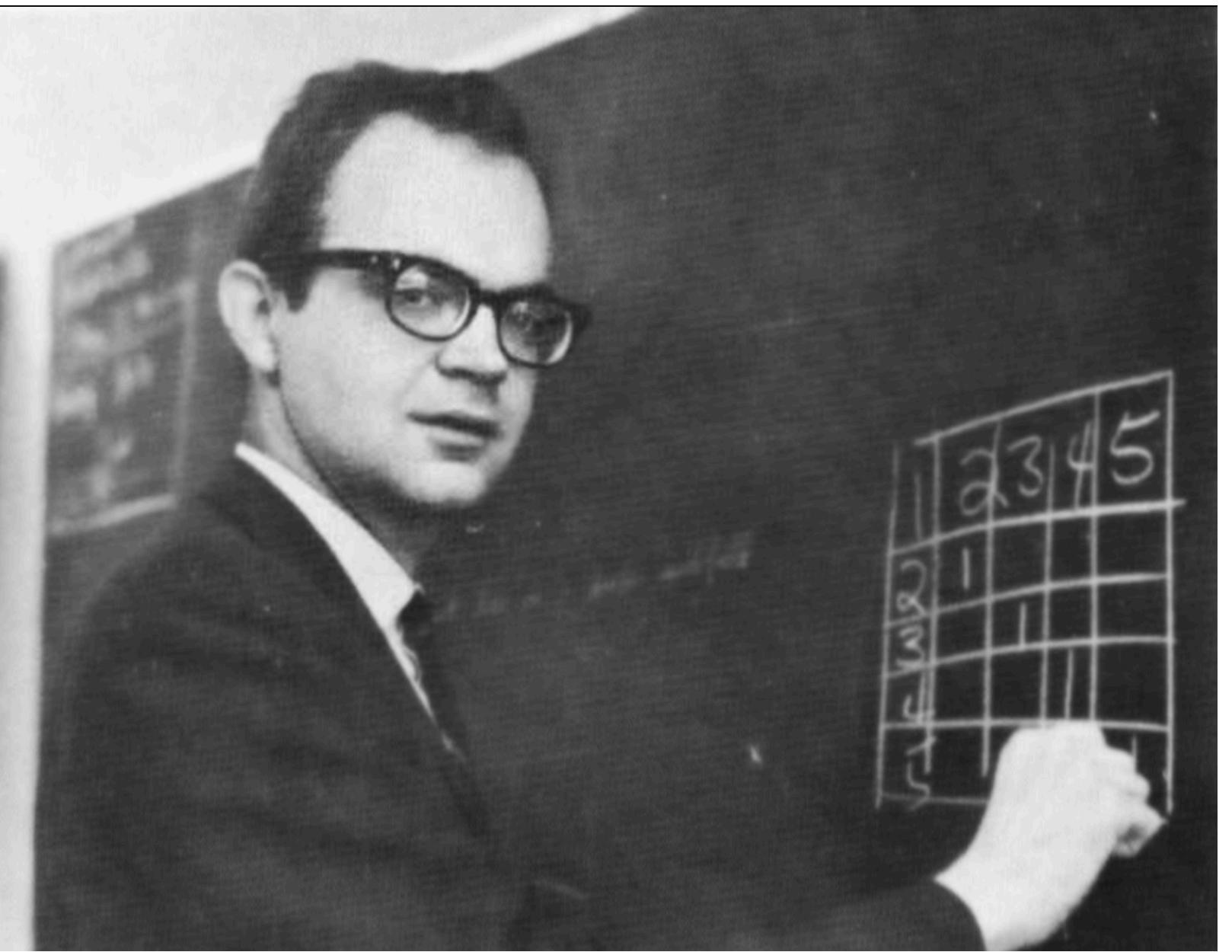


# Die Zeit läuft!

# Die Zeit läuft!

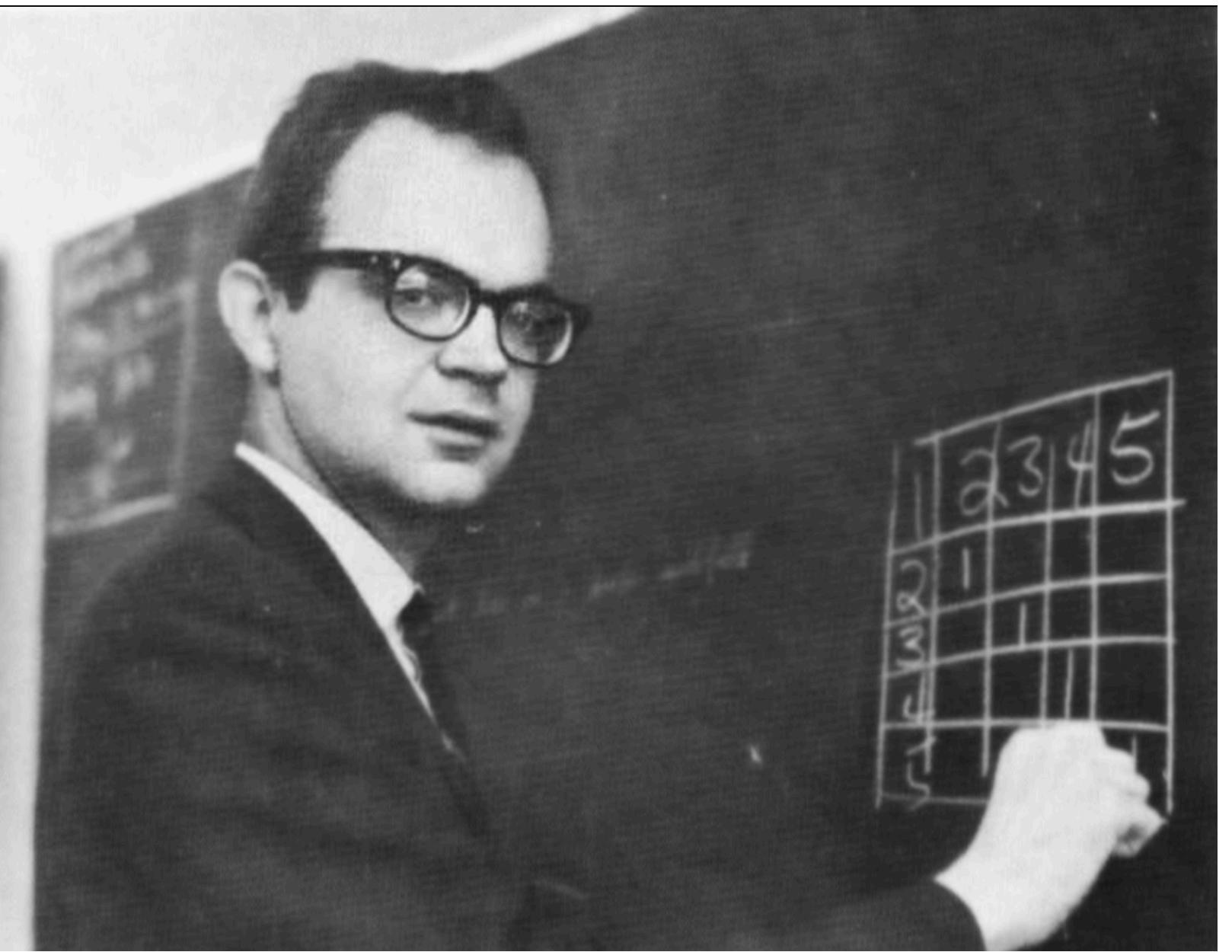


# Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik

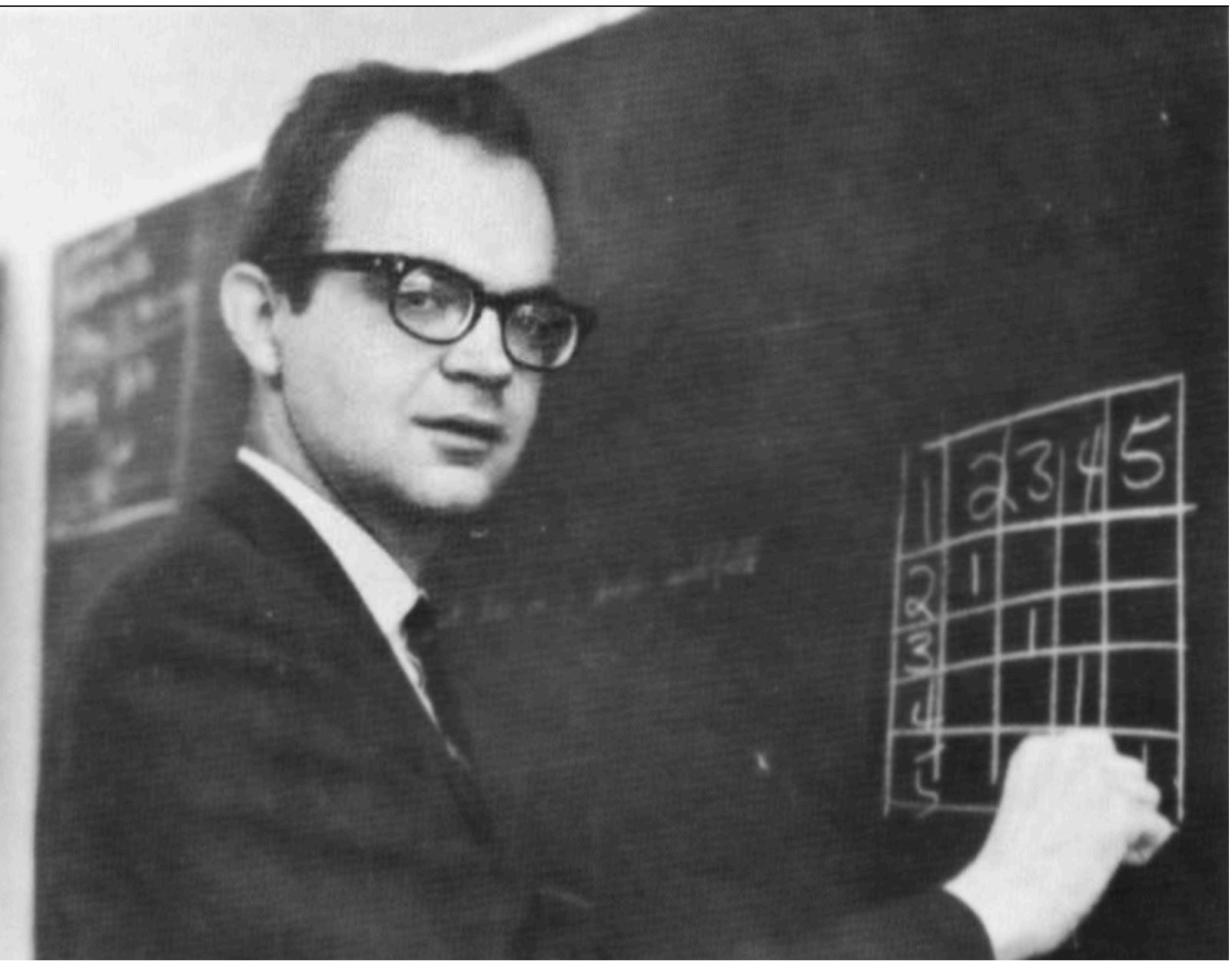
# Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



# Die Zeit läuft!

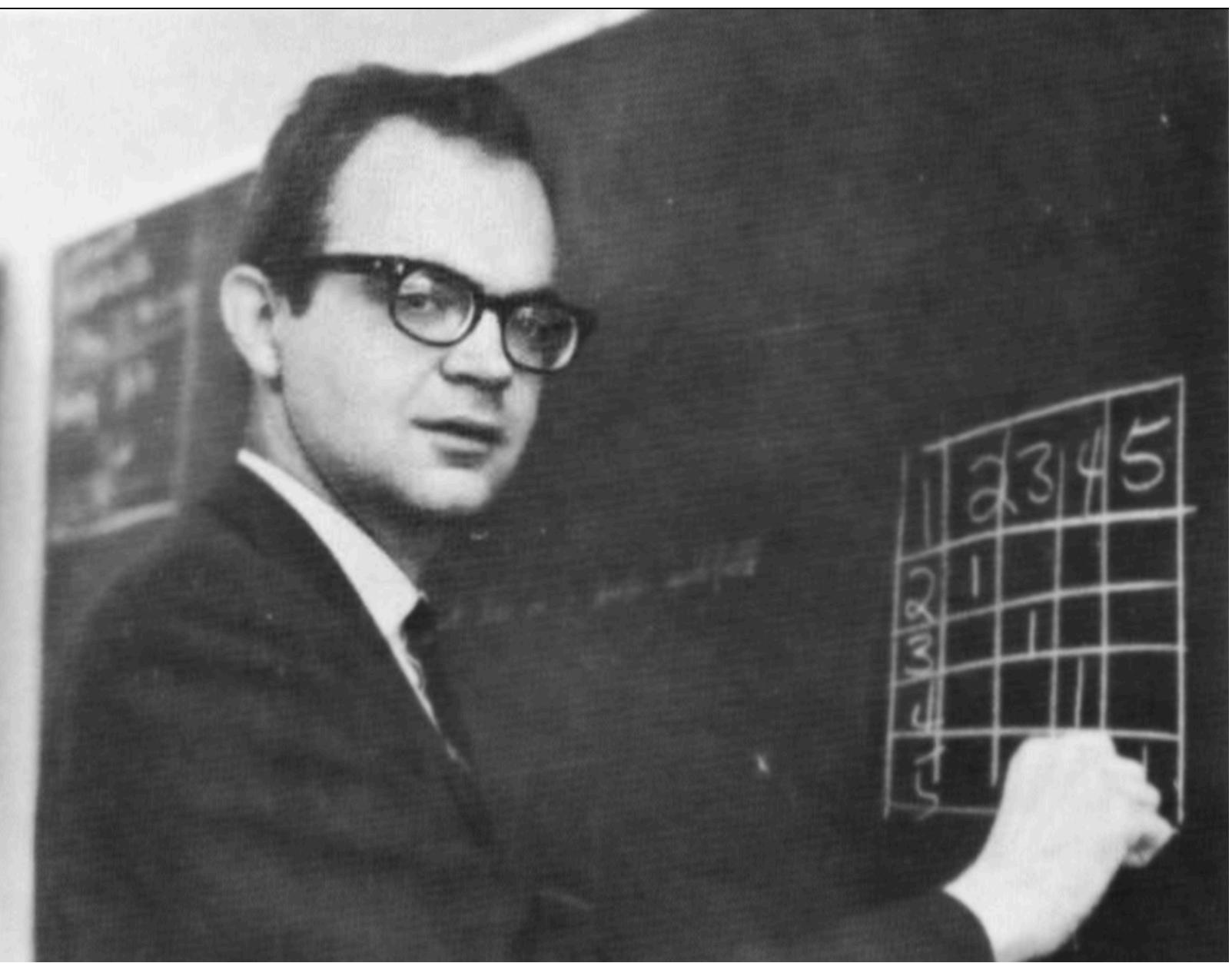


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten

# Die Zeit läuft!

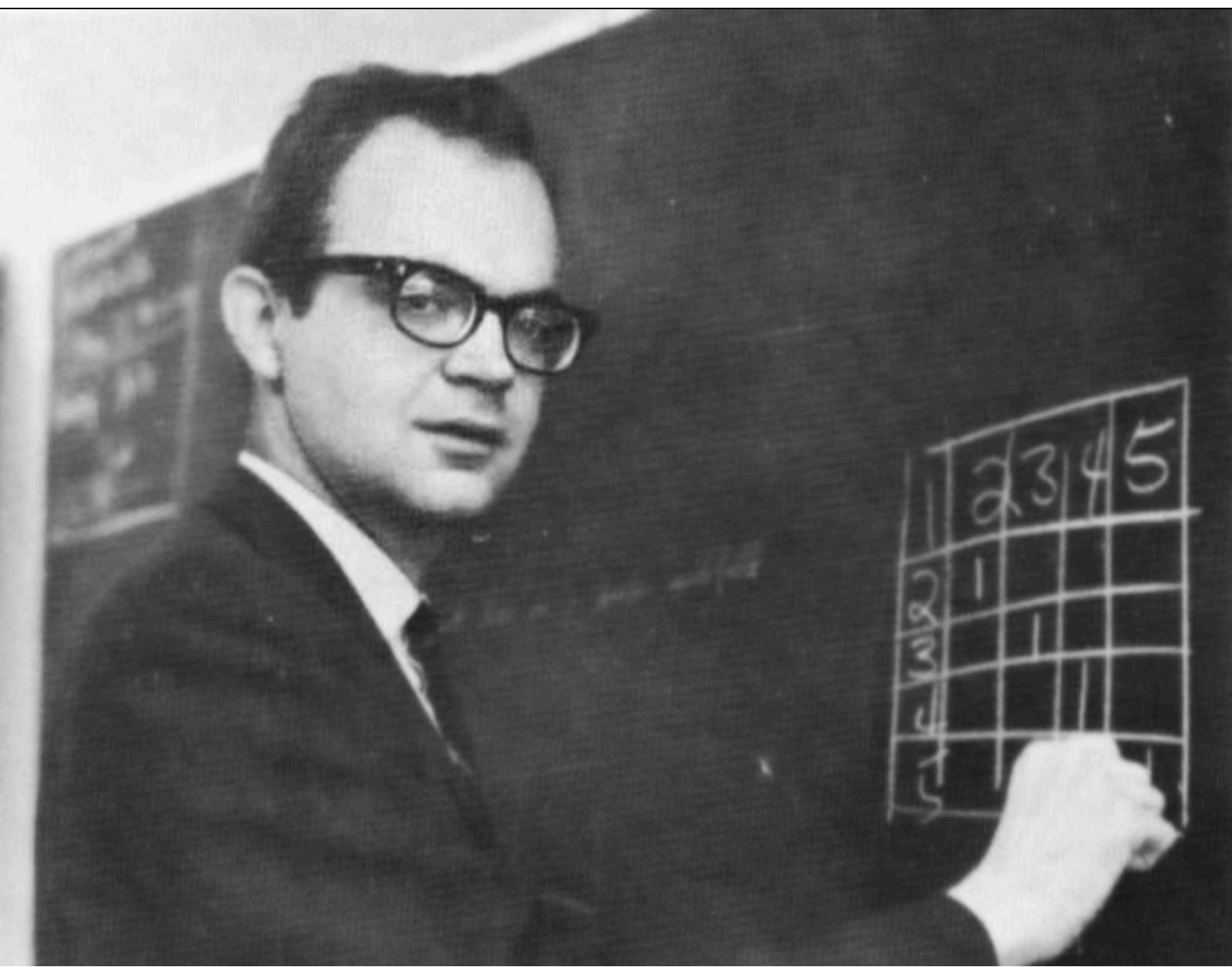


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben

# Die Zeit läuft!

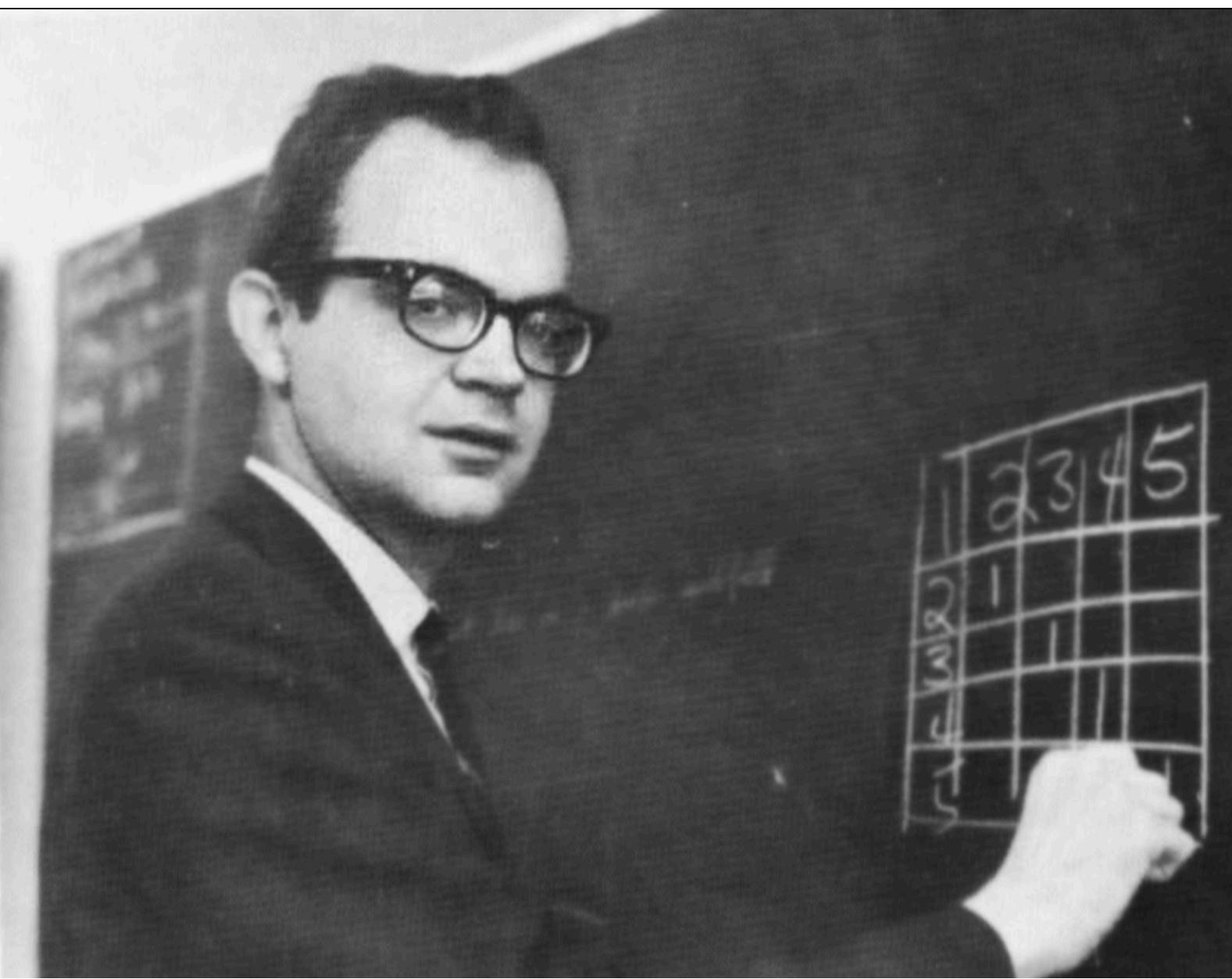


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte

# Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen

# Die Zeit läuft!

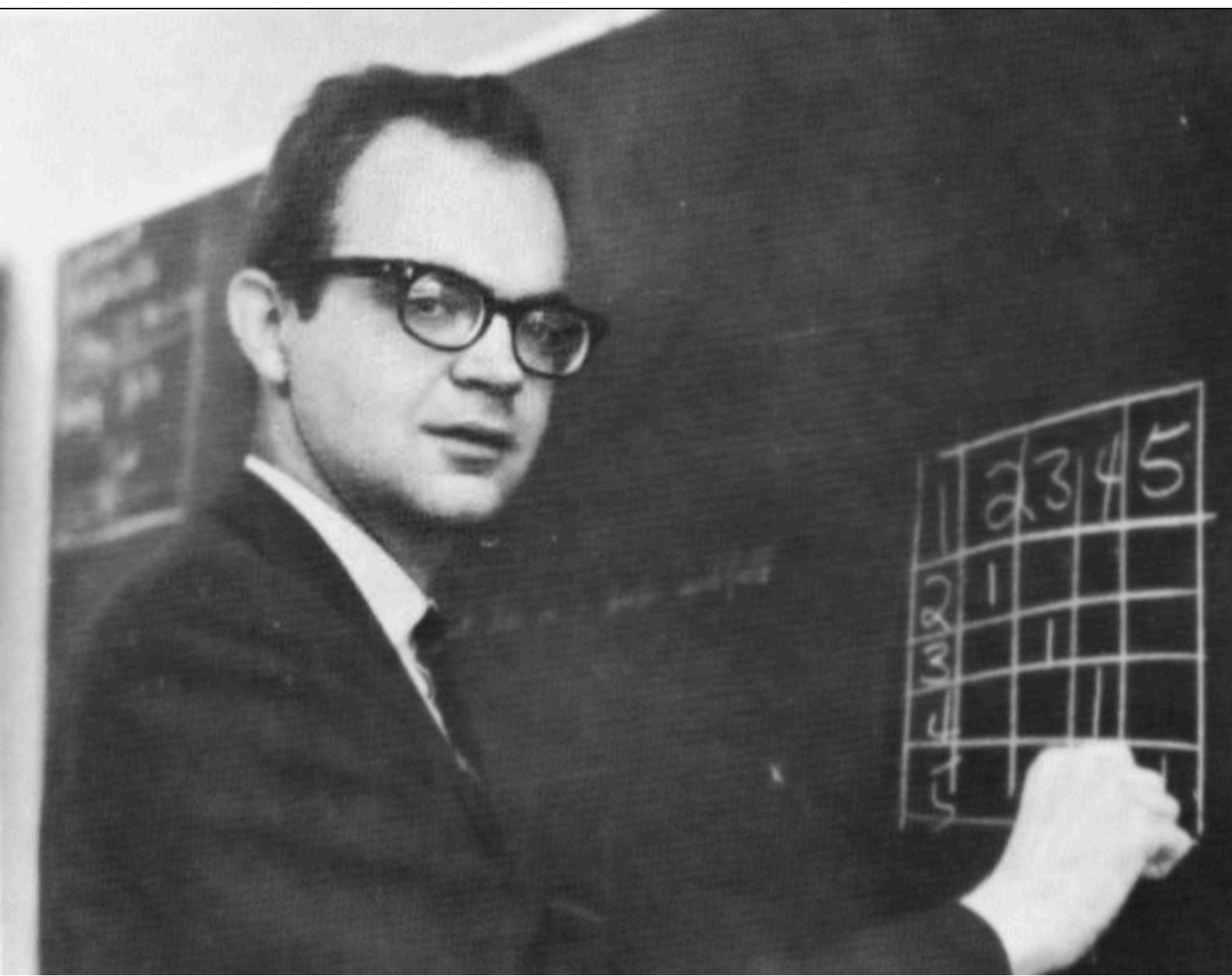


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

# Die Zeit läuft!

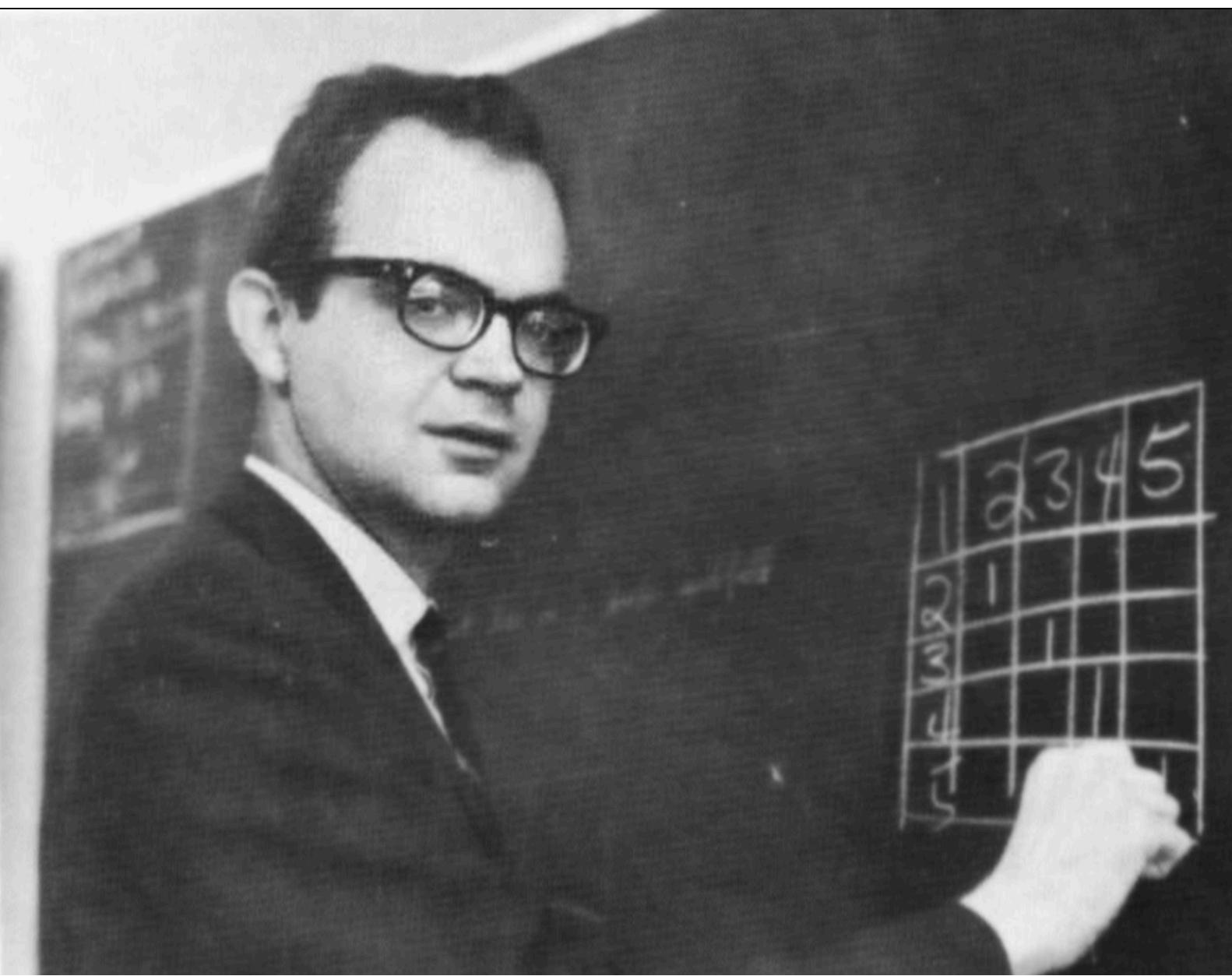


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

# Die Zeit läuft!

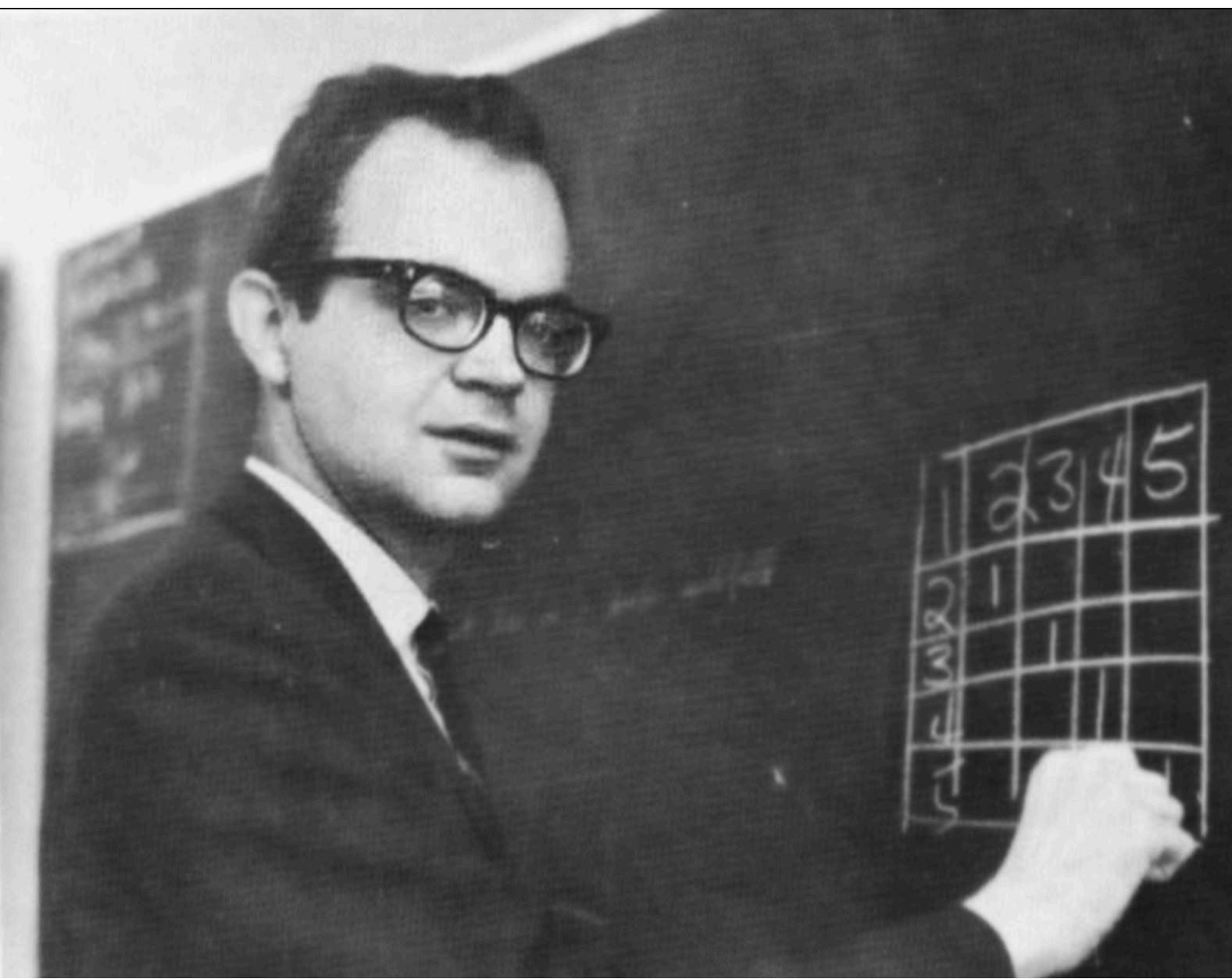


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

# Die Zeit läuft!

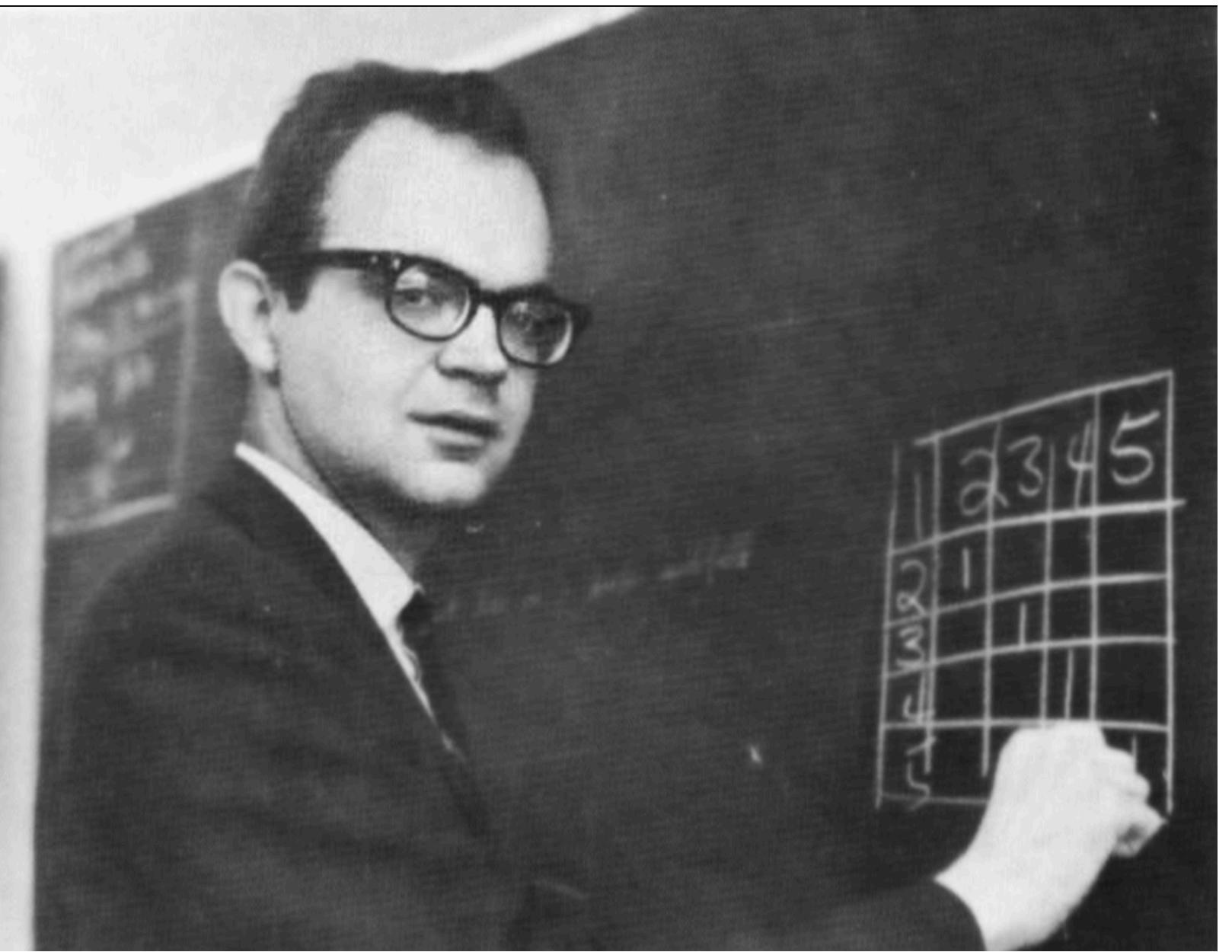


Knut Donald, erster Studierender der Informatik

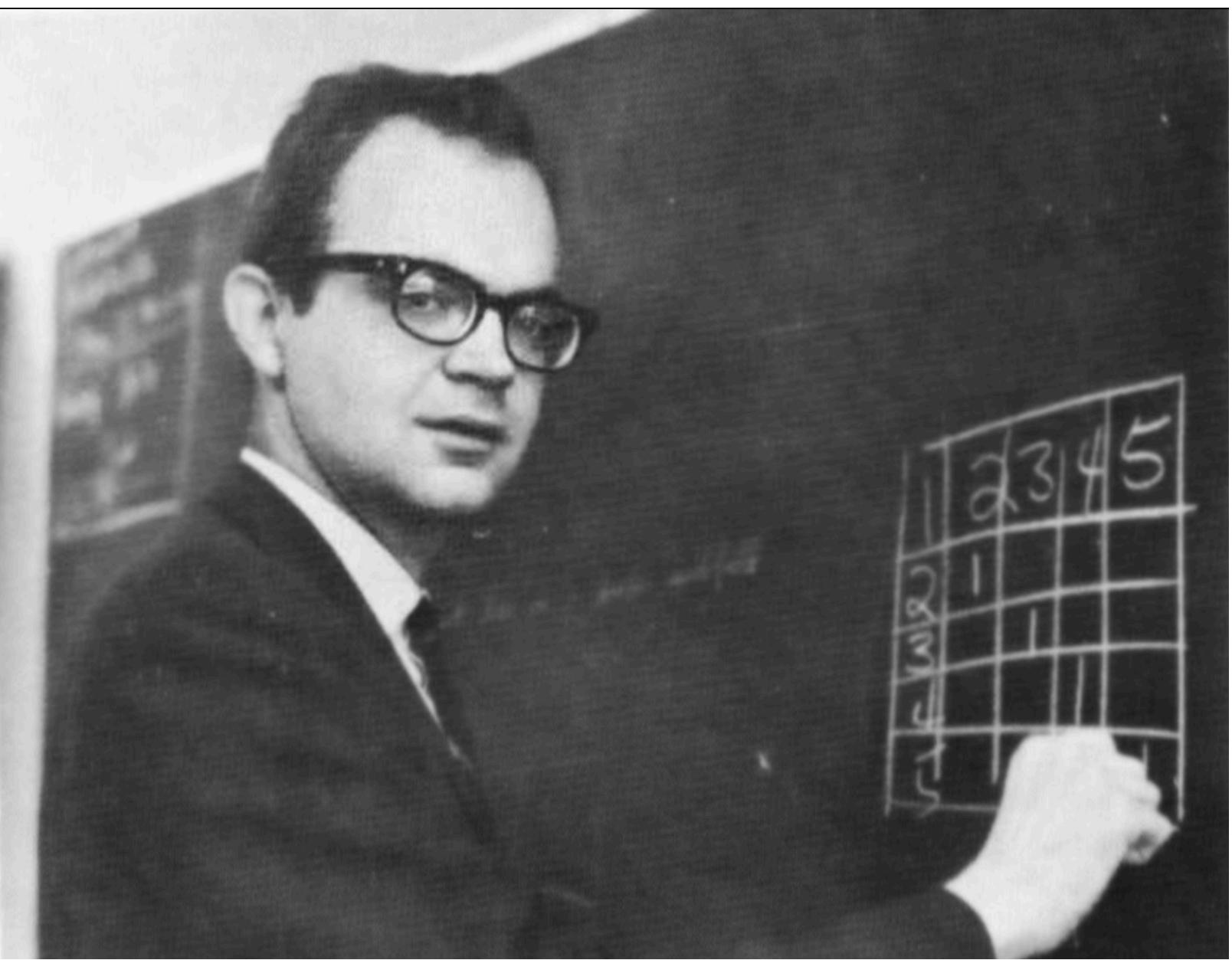


- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

# 30 Minuten später:



# 30 Minuten später:



# 30 Minuten später:



# 30 Minuten später:



# 30 Minuten später:



# 30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte

# 30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte

# 30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte
- Noch 44 Punkte zum Bestehen

# 30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte
- Noch 44 Punkte zum Bestehen
- Restliche Aufgaben...

# Restliche Aufgaben

# Restliche Aufgaben

1
20
3

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**

**Minuten**

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**

**Minuten**

**Punkte**

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

5
16
2

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

5
16
2

6
4
4

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

5
16
2

6
4
4

7
32
2

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

5
16
2

6
4
4

8
40
9
2

# Restliche Aufgaben

1
20
3

**Nummer**  
**Minuten**  
**Punkte**

2
32
3

3
40
10

4
8
5

5
16
2

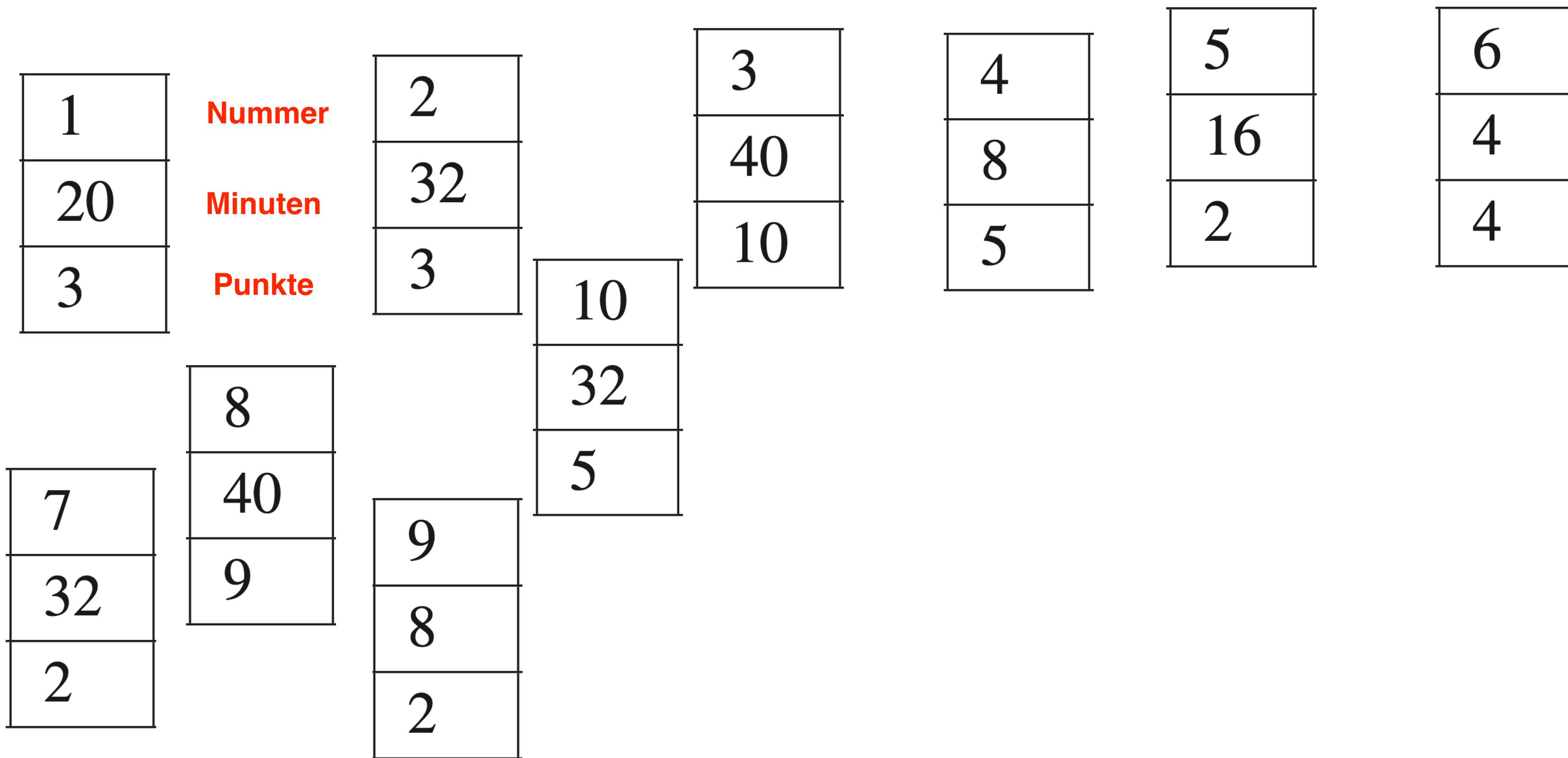
6
4
4

7
32
2

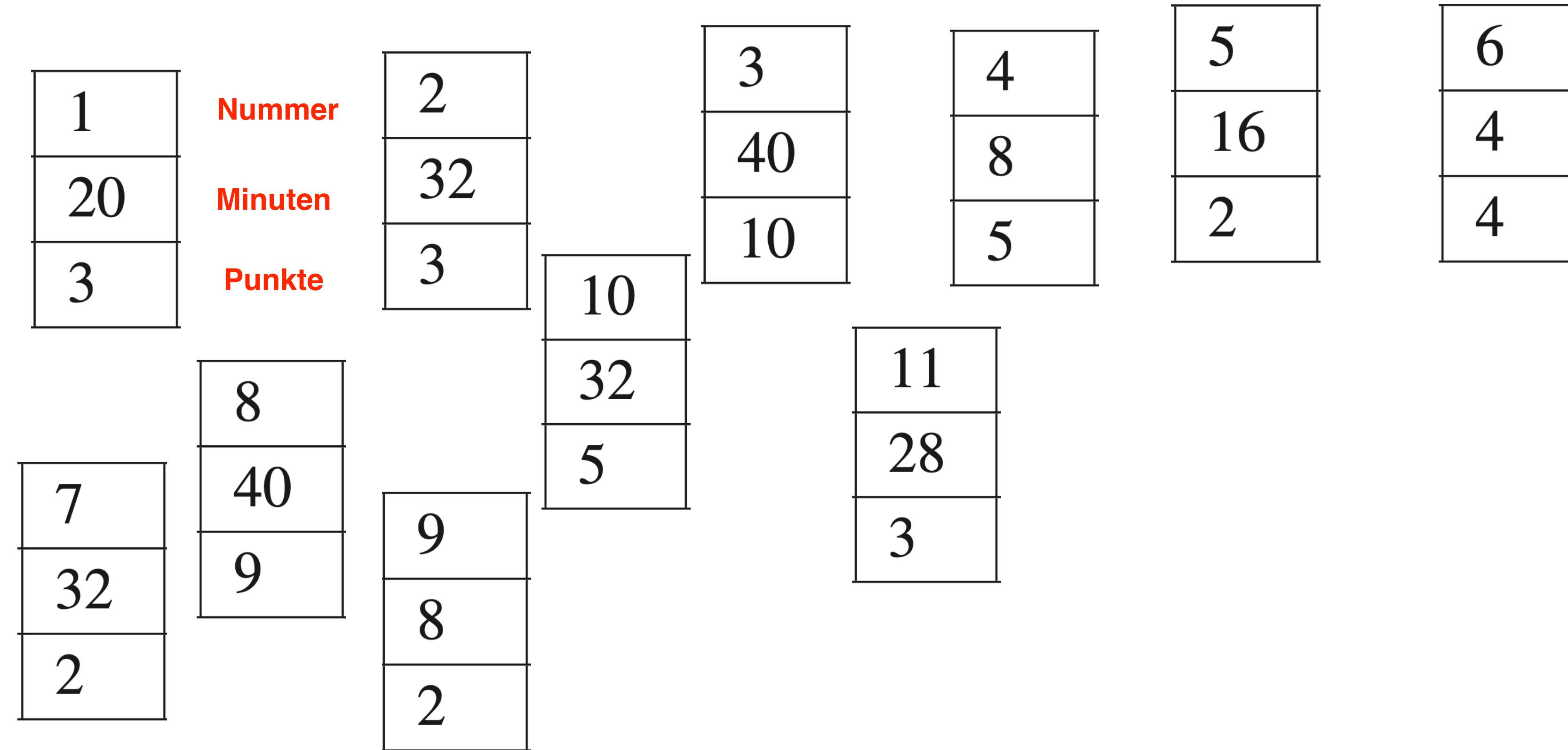
8
40
9

9
8
2

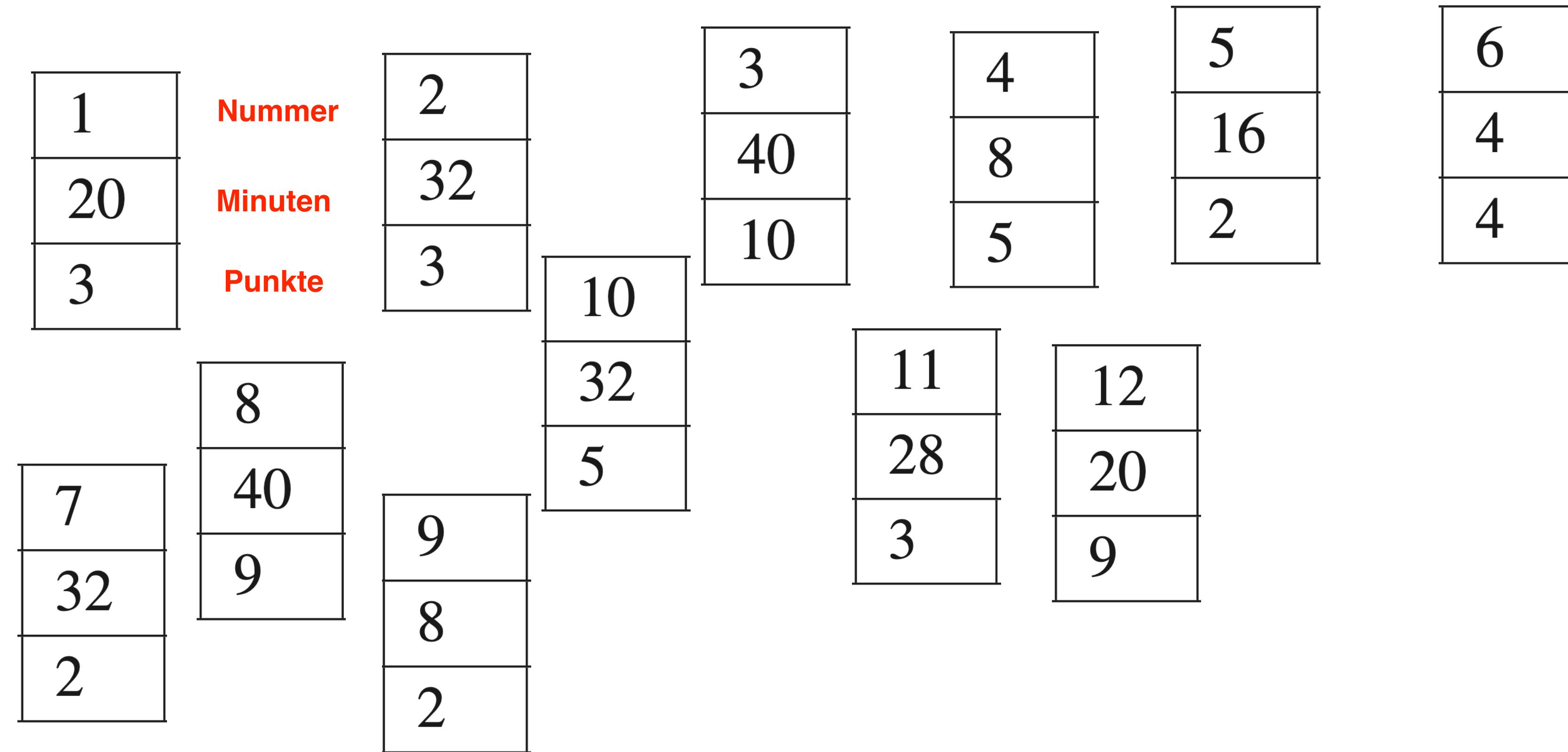
# Restliche Aufgaben



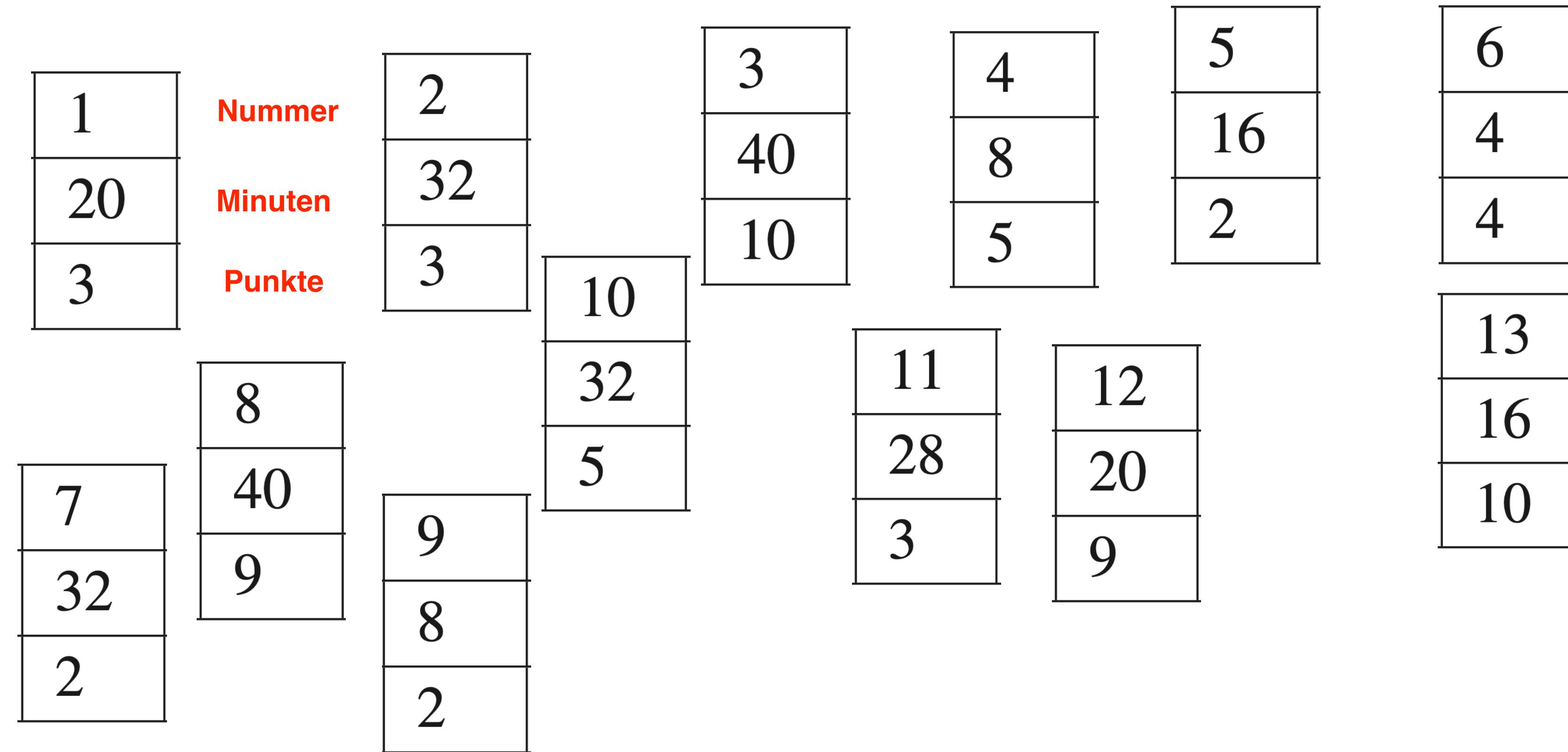
# Restliche Aufgaben



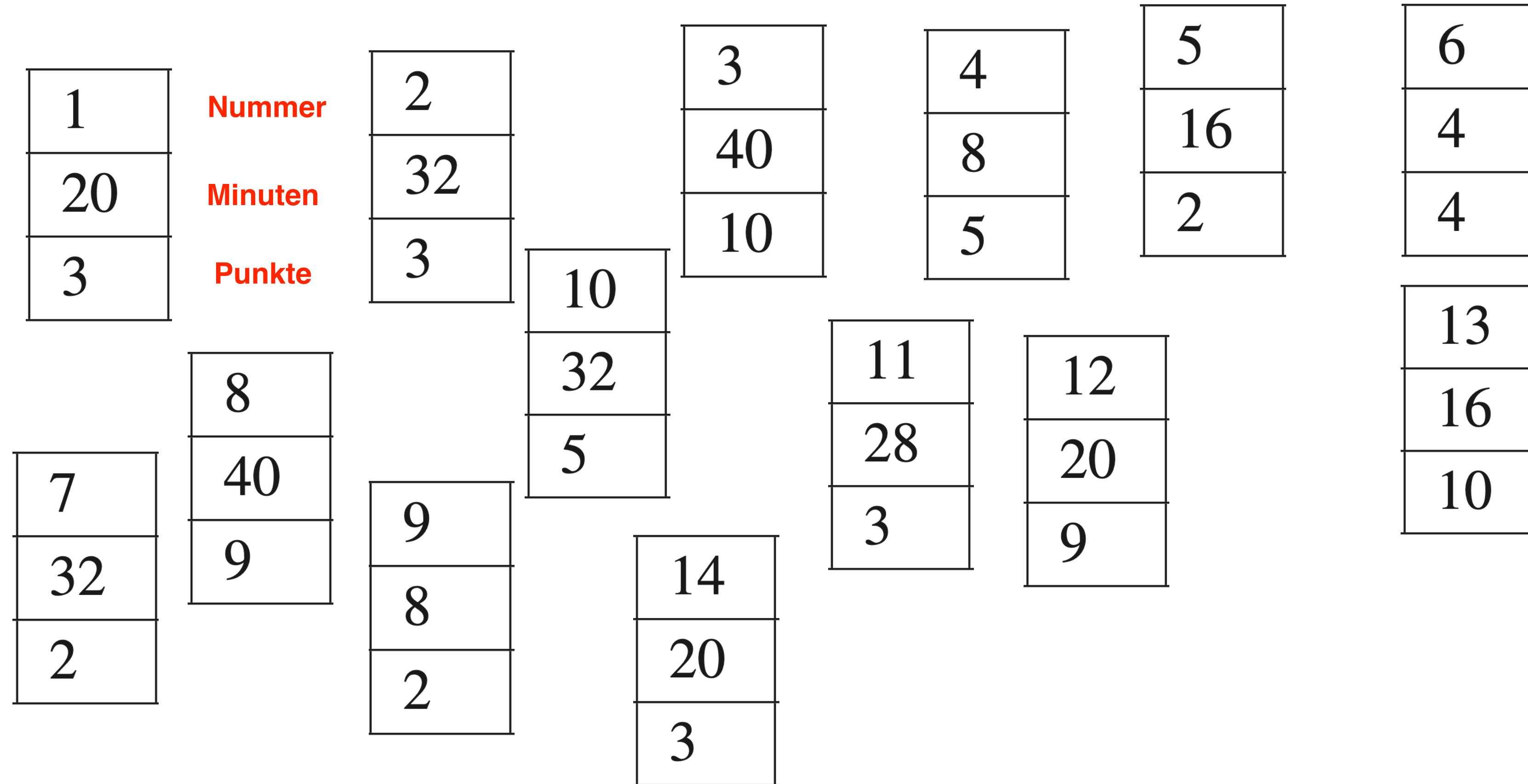
# Restliche Aufgaben



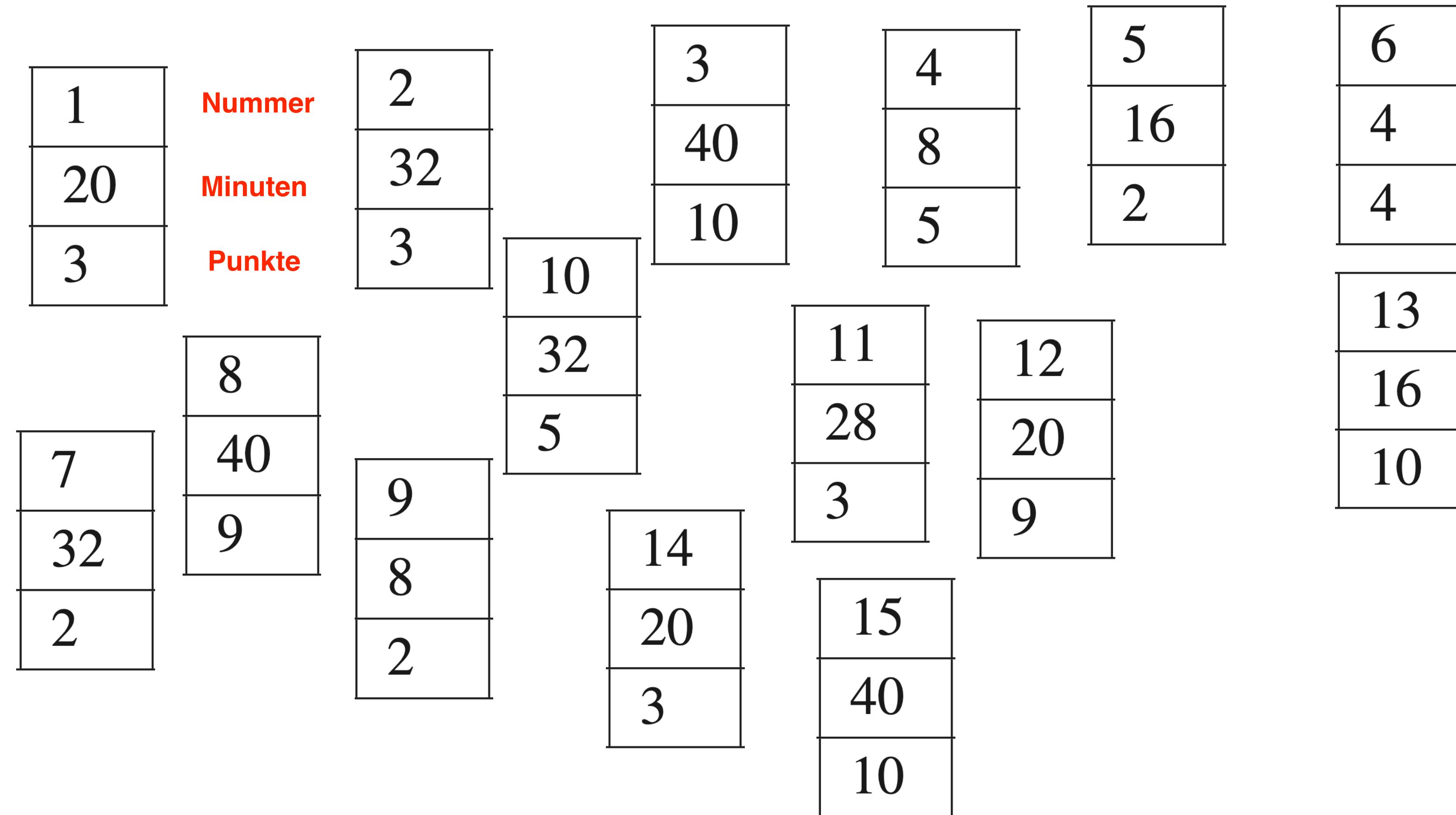
# Restliche Aufgaben



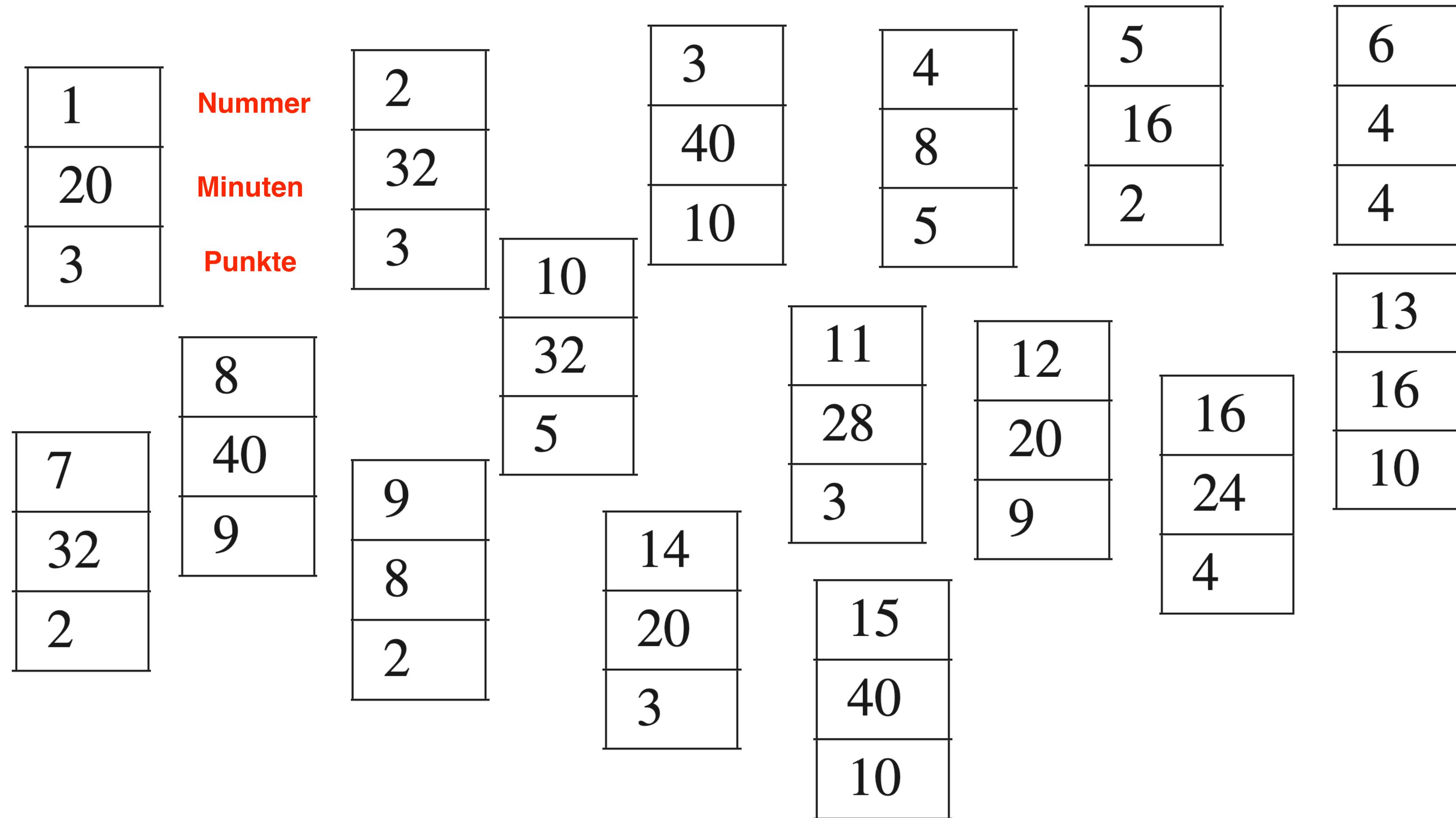
# Restliche Aufgaben



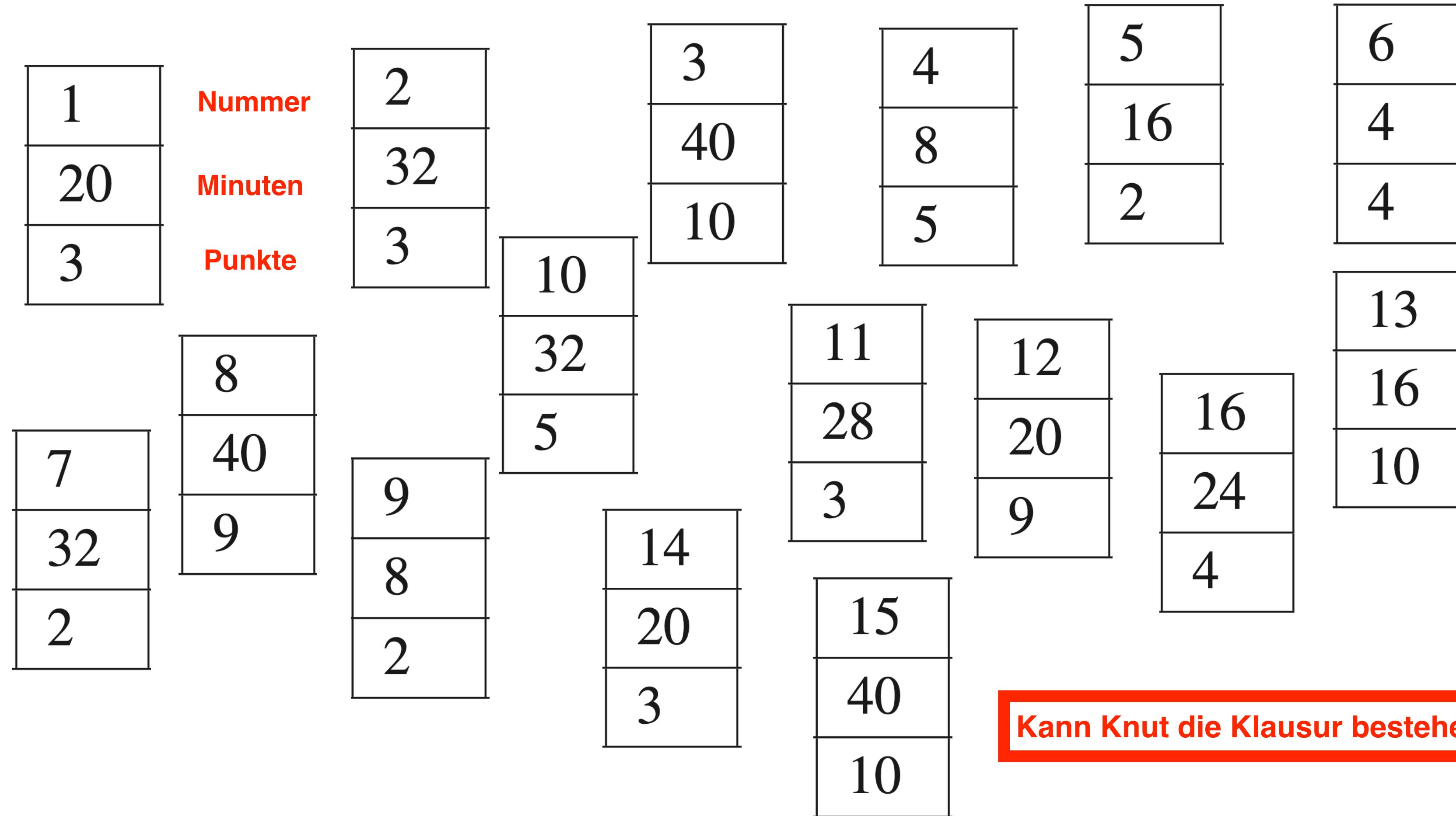
# Restliche Aufgaben



# Restliche Aufgaben



# Restliche Aufgaben



# Problemstellung

# Problemstellung

**Gegeben:**

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

# Problemstellung

## Gegeben:

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

## Gesucht:

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

**Gesucht:**

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

**Gesucht:**

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Go to [www.menti.com](http://www.menti.com) and use the code 35 85 04

# Problemstellung

## Gegeben:

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

## Gesucht:

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Go to [www.menti.com](http://www.menti.com) and use the code 35 85 04

**Mentimeter**

Welche Aufgaben soll Knut bearbeiten?  
You may choose multiple options.

A1  
 A2  
 A3  
 A4  
 A5  
 A6  
 A7  
 A8  
 A9  
 A10  
 A11  
 A12  
 A13  
 A14  
 A15  
 A16

**Submit**

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

**Gesucht:**

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Go to [www.menti.com](http://www.menti.com) and use the code 35 85 04

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

**Gesucht:**

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Go to [www.menti.com](http://www.menti.com) and use the code 35 85 04

### Beispiel 1.1

# Problemstellung

**Gegeben:**

$i$ Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$z_i$ Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
$p_i$ Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

**Zeitschranke:**  $Z = 120$

**Punkteschranke:**  $P = 44$

**Gesucht:**

Eine Menge  $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$  mit  $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$  und  $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Go to [www.menti.com](http://www.menti.com) and use the code 35 85 04

# Sortieren?

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = \mathbf{56}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \mathbf{30}$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = \mathbf{56}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \mathbf{30}$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 44$$

# Sortieren?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 44$$

Knut kann die Klausur bestehen!

# Problemdefinition

# Problemdefinition

## Problem 1.2

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- $n$  Objekte  $1, \dots, n$  mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- $n$  Objekte  $1, \dots, n$  mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$
- Größenschranke  $Z$

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*
- *Gewinnschranke P*

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*
- *Gewinnschranke P*

**Gesucht:**

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*
- *Gewinnschranke P*

**Gesucht:**

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*
- *Gewinnschranke P*

**Gesucht:**

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

# Problemdefinition

**Problem 1.2** (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*
- *Gewinnschranke P*

**Gesucht:**

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i \in S} p_i \geq P$$

# Optimierungsvariante

# Optimierungsvariante

**Problem 1.2' (MAXIMUM KNAPSACK).**

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*

**Gesucht:**

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i \in S} p_i = \text{Maximal}$$

# Optimierungsvariante

**Problem 1.2' (MAXIMUM KNAPSACK).**

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i$  Gewinn  $p_i$*
- *Größenschranke Z*

**Gesucht:**

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i \in S} p_i = \text{Maximal}$$

# Teilaufgaben?!

# Teilaufgaben?!

**Problem 1.3 ( FRACTIONAL KNAPSACK).**

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i > 0$  Gewinn  $p_i > 0$*
- *Größenschranke Z*

**Gesucht:**

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in [0, 1]$$

*sodass*

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

# Teilaufgaben?!

**Problem 1.3 ( FRACTIONAL KNAPSACK).**

**Gegeben:**

- *n Objekte 1, ..., n mit jeweils Größe  $z_i > 0$  Gewinn  $p_i > 0$*
- *Größenschranke Z*

**Gesucht:**

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in [0, 1]$$

*sodass*

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

# Algorithmus

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;  
Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .
- Setze  $j := 1$ .
- 2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**
- 3:      $x_{\pi(j)} := 1$
- 4:      $j := j + 1$
- 5: Setze  $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
- 6: **return**

# Teilaufgaben?!

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40 \quad X_{15}$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$X_{15}$

# Teilaufgaben!?

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$X_{15}$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$X_{15}$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0,6$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0,6$

# Teilaufgaben?!

nach Wert  $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$  sortieren:

$i$	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
$z_i$	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
$p_i$	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 46$$
$$x_{15} = 0,6$$

# Algorithmus

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

---

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

---

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

---

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

---

**Eingabe:**  $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** (*Greedy-Algorithmus*)

---

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

Setze  $j = 1$ .

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

Setze  $j = 1$ .

2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

Setze  $j = 1$ .

2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**

3:      $x_{\pi(j)} := 1$

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

Setze  $j := 1$ .

2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**

3:      $x_{\pi(j)} := 1$

4:      $j := j + 1$

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .

Setze  $j := 1$ .

2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**

3:      $x_{\pi(j)} := 1$

4:      $j := j + 1$

5: Setze  $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

# Algorithmus

## Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

**Eingabe:**  $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

**Ausgabe:**  $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

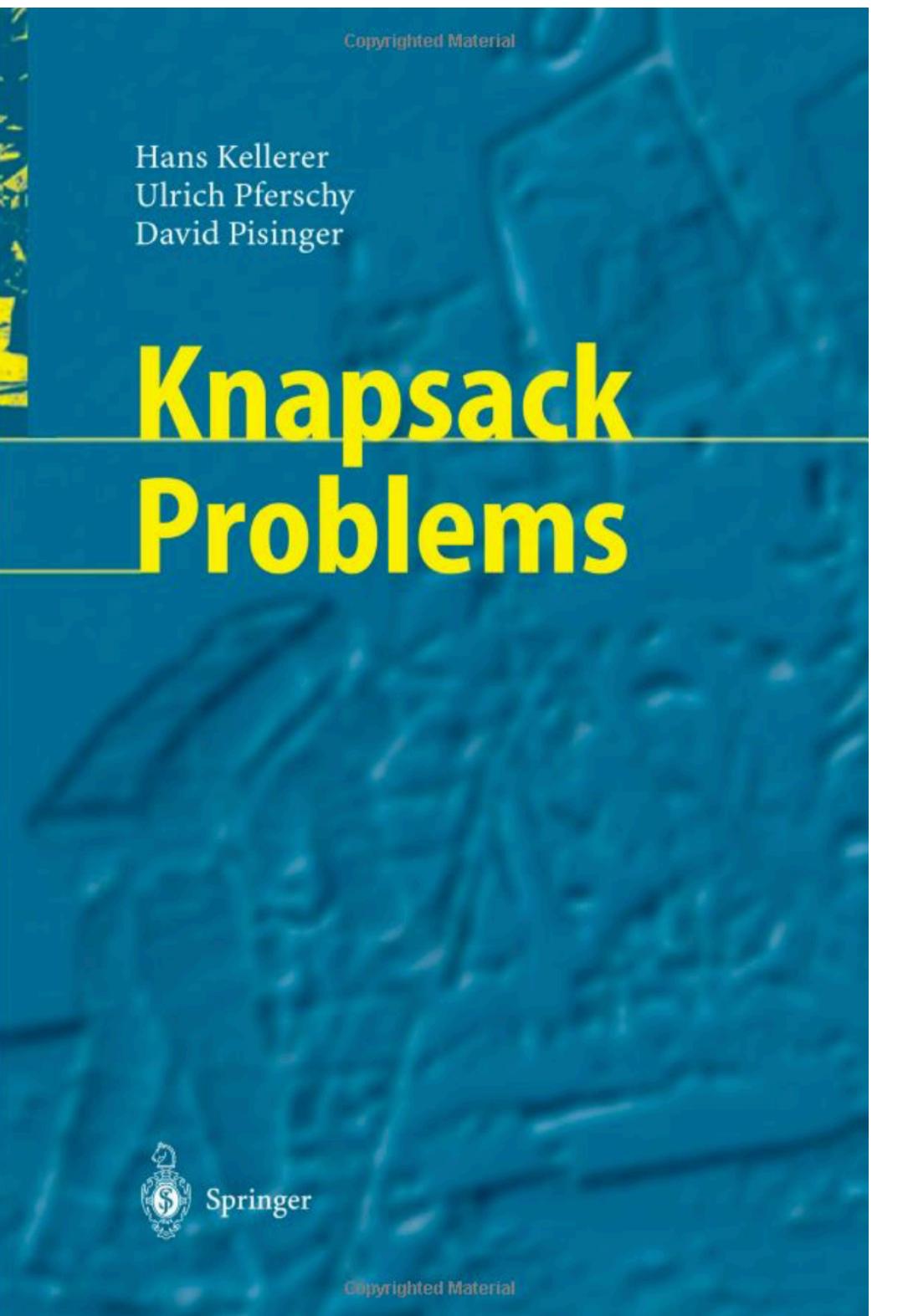
und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

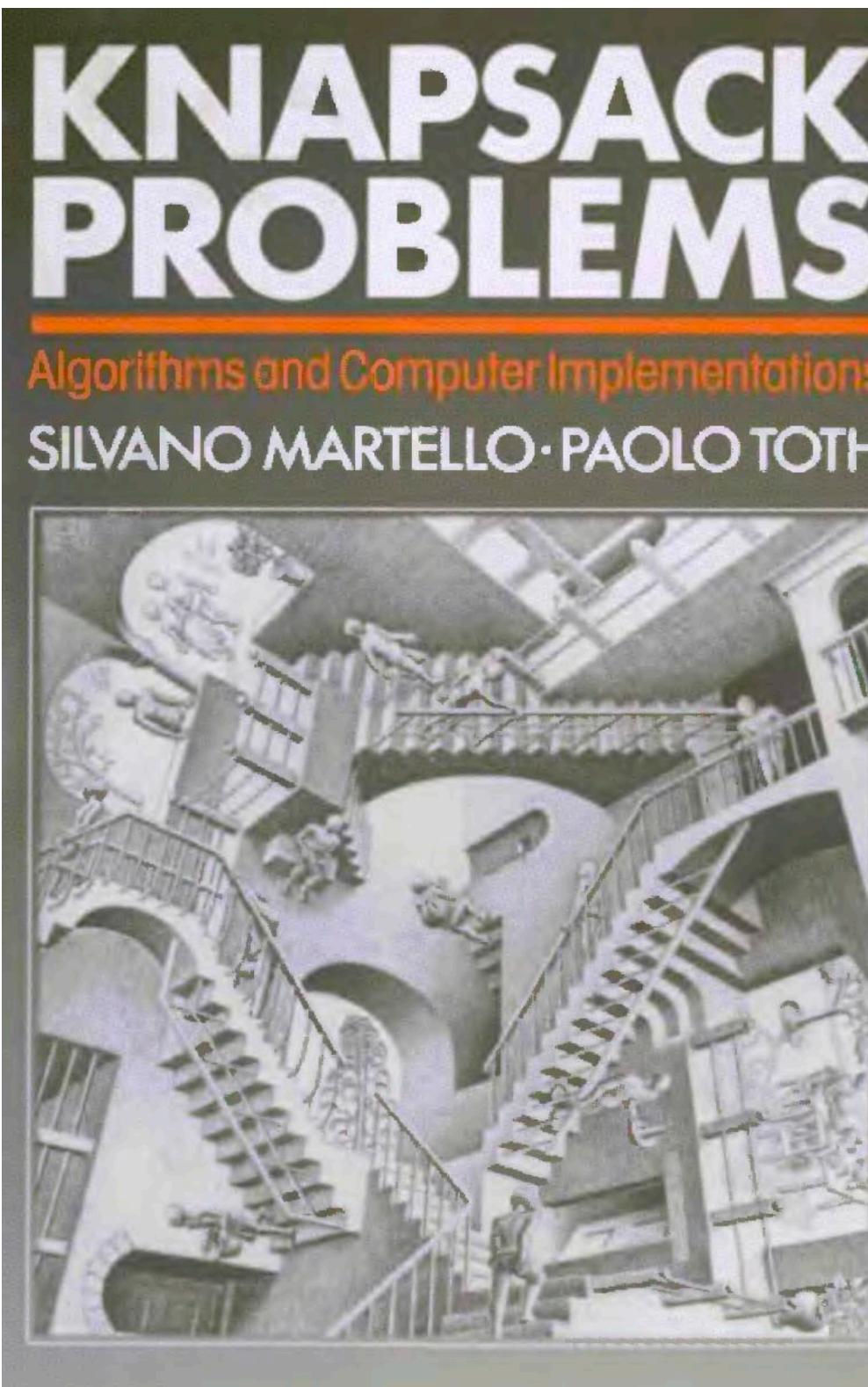
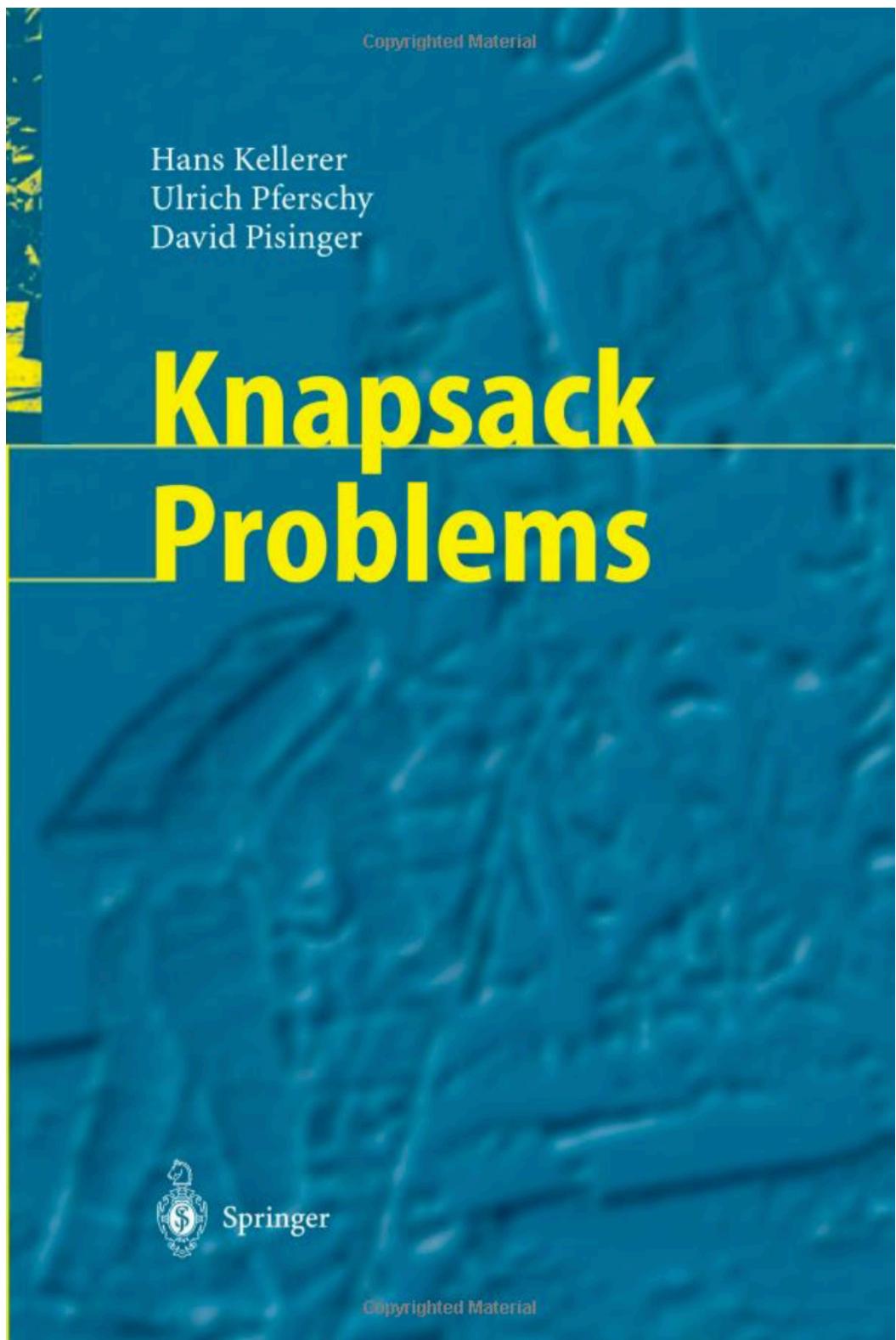
- 1: Sortiere  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\frac{z_i}{p_i}$  aufsteigend;  
Dies ergibt die Permutation  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ .
- Setze  $j := 1$ .
- 2: **while**  $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$  **do**
- 3:      $x_{\pi(j)} := 1$
- 4:      $j := j + 1$
- 5: Setze  $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
- 6: **return**

# Literatur

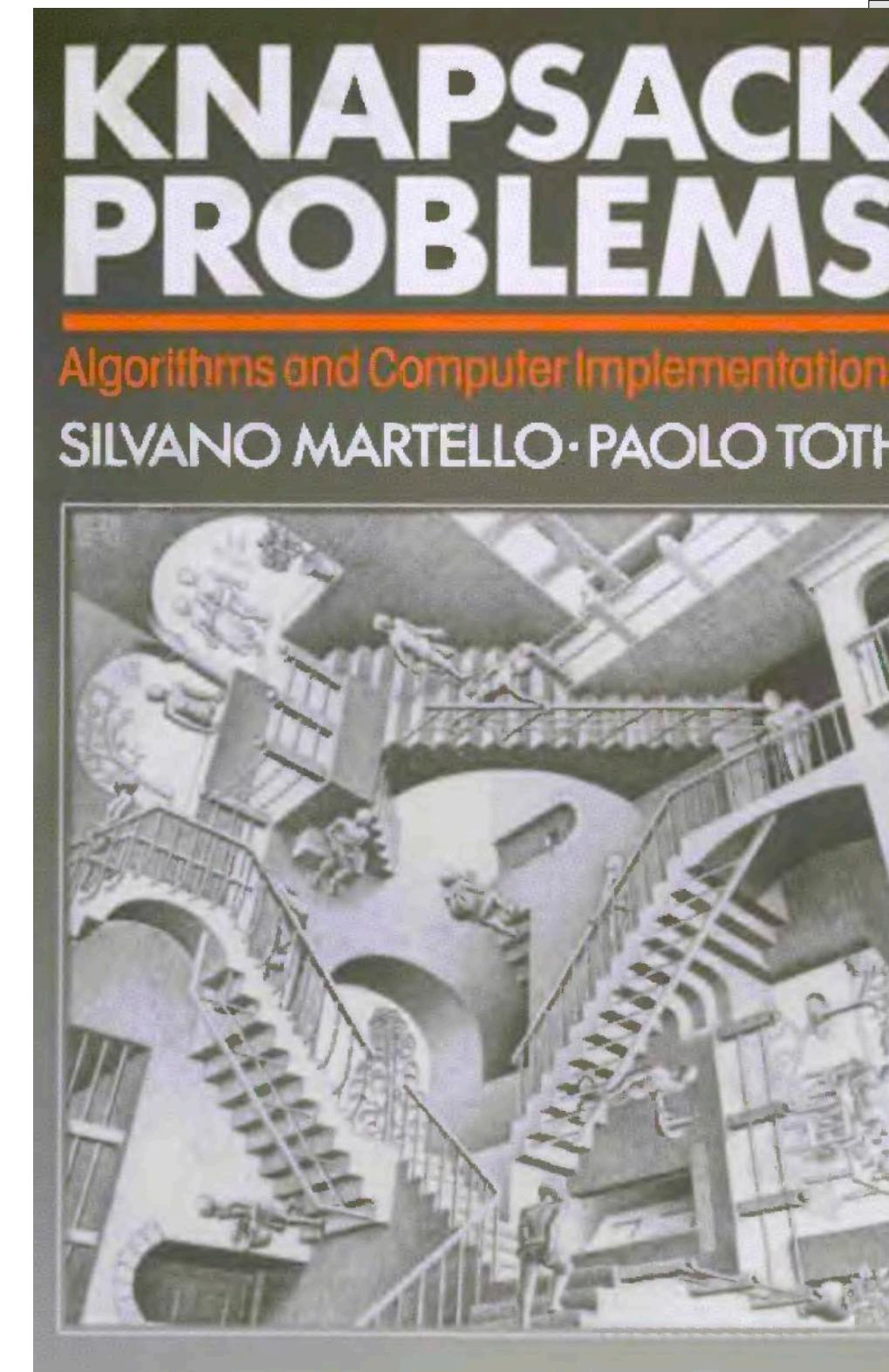
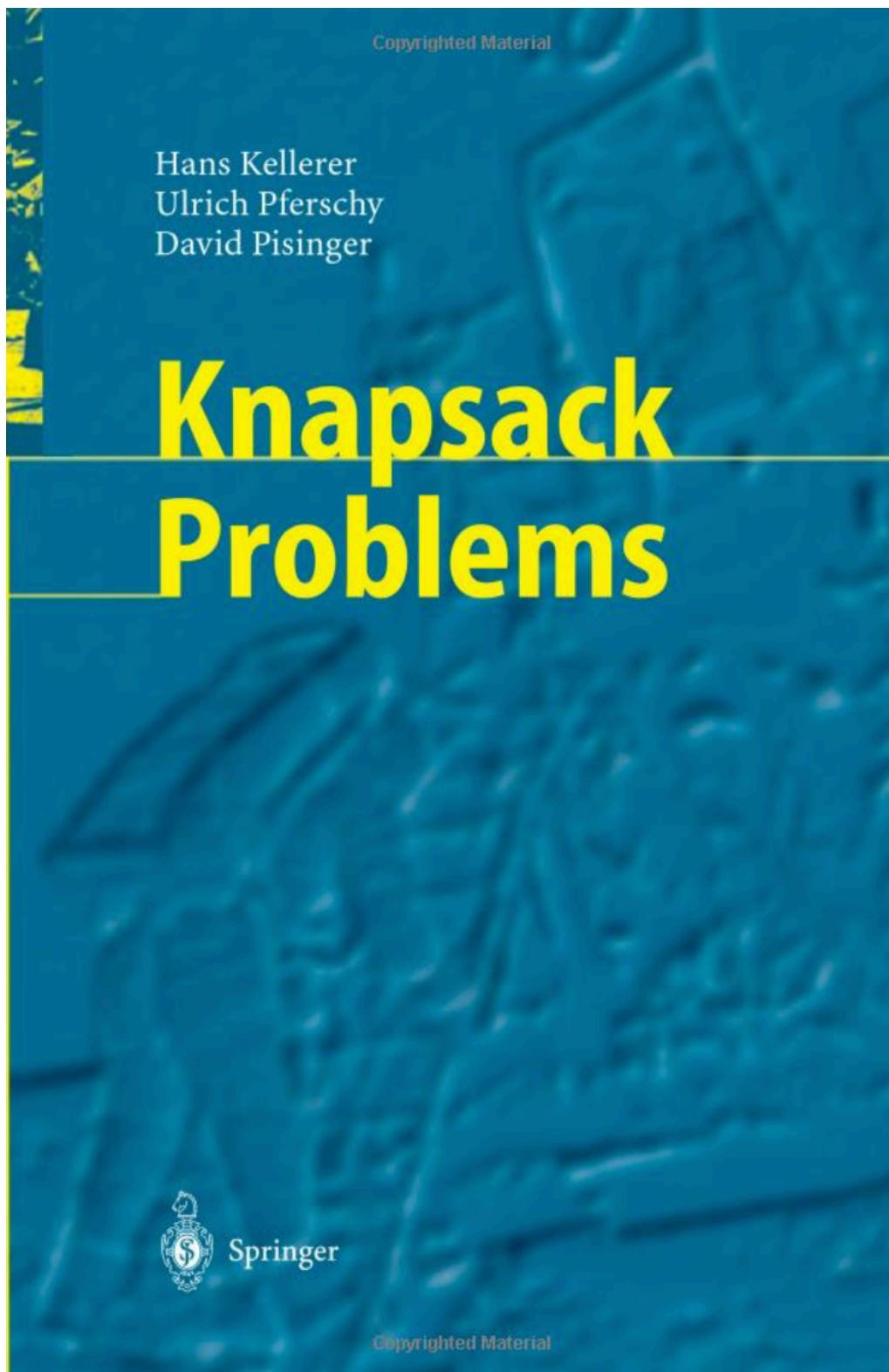
# Literatur



# Literatur



# Literatur



KnapsackProblems.pdf (Seite 5 von 306)	
Hervorhebung Drehen Markierungen Suchen Suchen nach	
Preface	xi
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 What are knapsack problems?	1
1.2 Terminology	2
1.3 Computational complexity	6
1.4 Lower and upper bounds	9
<b>2 0-1 Knapsack problem</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction	13
2.2 Relaxations and upper bounds	16
2.2.1 Linear programming relaxation and Dantzig's bound	16
2.2.2 Finding the critical item in $O(n)$ time	17
2.2.3 Lagrangian relaxation	19
2.3 Improved bounds	20
2.3.1 Bounds from additional constraints	20
2.3.2 Bounds from Lagrangian relaxations	23
2.3.3 Bounds from partial enumeration	24
2.4 The greedy algorithm	27

## Contents

# Literatur

# Literatur



## Algorithmen und Datenstrukturen II

Sándor P. Fekete

LATEX Version: Arne Schmidt

27. Juni 2018

Institute of Operating Systems and Computer  
Networks

*Vielen Dank!*

*Vielen Dank!*

[s.fekete@tu-bs.de](mailto:s.fekete@tu-bs.de)