Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen muss bis zum 02.07.20 um 23:59 Uhr erfolgen. Lösungen müssen per Mail mit einer pdf-Datei (Name der Datei „`blatt_[nr]_[grp]_[team].pdf`“) an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Die Email-Adressen sind unter `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/index.html` zu finden.

Hausaufgabe 1 (Approximation mit GREEDY$_0$): **(3+1+1+3+4 Punkte)**
Wir betrachten den Algorithmus GREEDY$_0$ für Instanzen mit folgenden Eigenschaften: (A) jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, (B) die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

a) Sei das $(k+1)$-ste Objekt das erste Objekt, welches GREEDY$_0$ nicht aufnimmt und sei OPT der optimale Lösungswert.

   (i) Zeige: $(\alpha - 1)p_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$

   (ii) Zeige: $\sum_{i=1}^{k} p_i \leq \text{OPT}$

   (iii) Zeige: $\text{OPT} \leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i$

   (iv) Zeige: GREEDY$_0$ liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (A) und (B) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$-Approximation. (Hinweis: Nutze (i)-(iii).)

b) Zeige: Der Approximationsfaktor ist bestmöglich. D.h., für jedes α und für jedes c mit $1 - \frac{1}{\alpha} < c \leq 1$ ist GREEDY$_0$ auf diesen Instanzen keine c-Approximation.

Hausaufgabe 2 (3-Satisfiability): **(4+3 Punkte)**
Betrachte die folgende logische Formel.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

a) Transformiere die Formel in eine Instanz von 0-1-KNAPSACK, indem du die Transformation aus der Vorlesung nutzt.

b) Wie viele Lösungen gibt es für diese Instanz? Begründe deine Antwort.

Hausaufgabe 3 ($\textsc{Greedy}_k$): (11 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmus $\textsc{Greedy}_k$ aus der Vorlesung. Wende $\textsc{Greedy}_k$ auf die folgende Instanz an.

i	1	2	3	4
z_i	18	20	22	19
p_i	19	20	21	16

mit $Z = 41$ und $k = 2$

Gib dazu die folgenden Mengen bzw. Werte in jeder Iteration tabellarisch an:

- $\overline{S}$: Menge fixierter Objekte
- $\sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Objekte
- $Z - \sum_{i \in \overline{S}} z_i$: Restkapazität
- $G + \sum_{i \in \overline{S}} p_i$: Wert der fixierten Objekte plus Greedy auf nicht fixierten Objekten.
- G_k: Wert der bisher besten gefundenen Lösung
- S: Lösungsmenge der bisher besten Lösung

Achte darauf, dass M mit einer kleinsten Menge anfängt und mit einer größten endet. Zusätzlich soll M lexikographisch sortiert sein: für zwei gleichgroße Mengen M_1 und M_2 kommt M_1 vor M_2, falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$.

(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X, die nicht in Y vorkommen.)