Algorithmen und Datenstrukturen 2 **SoSe 2020**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Arne Schmidt

Übungsblatt 2a

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen am 10./12.06.

Präsenzaufgabe:
In dieser Aufgabe betrachten wir den Branch-and-Bound-Algorithmus für Maximum Knapsack aus der Vorlesung. Sei $I := (z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$ ein Instanz von Maximum Knapsack.

a) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, für den die gültige Belegung $b_1, \ldots, b_{l-1}$ gilt. Sei $U := UB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **obere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt U **immer** als obere Schranke?

b) Betrachte einen Knoten v in einem Entscheidungsbaum T, für den die gültige Belegung $b_1, \ldots, b_{l-1}$ gilt. Sei $P := LB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **untere Schranke**. Für welche Teilbäume von T gilt P **immer** als untere Schranke?

Im folgenden benutzen wir Greedy$_0$ (siehe Blatt 1) als untere Schranke und den Greedy-Algorithmus für Fractional Knapsack als obere Schranke.

c) Zeige oder widerlege: Falls direkt vor einer Verzweigung $U = P$ gilt, haben wir eine optimale Lösung gefunden.

d) Der Entscheidungsbaum, den der Branch-and-Bound-Algorithmus ablaufen kann, besitzt $2^{n+1} - 1$ viele Knoten. Da der Algorithmus Teilbäume abschneidet, besteht die Hoffnung, dass deutlich weniger Knoten besucht werden müssen.

   Zeige: Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Instanz mit n Objekten, bei der der Branch-and-Bound-Algorithmus mindestens $2^{\frac{n}{2}} - 1$ Knoten des gesamten Entscheidungsbaumes besucht.
   (Hinweis: Ein Entscheidungsbaum der Höhe h besitzt $2^h - 1$ Knoten. Finde also eine Instanz für jedes n, sodass alle Knoten auf den ersten $\frac{n}{2}$ Ebenen besucht werden müssen.)