Prof. Dr. Sándor Fekete
Arne Schmidt

Übungsblatt 1a

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen am 27./29.05.

Präsenzaufgabe 1 (Hörsaal-Auslastung):
In der Übung haben wir bisher das Hörsaal-Belegungs-Problem betrachtet. In diesem Problem soll eine möglichst hohe Anzahl an disjunkten Intervallen gefunden werden.

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Variante: Das Hörsaal-Auslastungs-Problem. Gesucht ist eine Menge disjunkter Intervalle, die möglichst viel Zeit abdecken. Formal:

Gegeben: Menge von Intervallen $\mathcal{I} := \{I_1 = [s_1, e_1), \ldots, I_n = [s_n, e_n)\}$

Gesucht: Teilmenge $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ disjunkter Intervalle mit $\sum\limits_{I_i \in \mathcal{I}'} (e_i - s_i)$ maximal.

a) Zeige: Die folgenden Greedy-Strategien sind nicht optimal.

   Wir wählen als nächstes Intervall das Intervall I_i mit...

   (i) ...dem frühesten Start.

   (ii) ...den meisten Überlappungen.

   (iii) ...$(e_i - s_i)$ größtmöglich.

b) Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen ist dynamische Programmierung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Intervalle bereits nach deren Ende sortiert sind.

   Sei nun $\textsc{opt}(i)$ der bestmögliche Wert, der mit den ersten i Intervallen erreicht werden kann. Um $\textsc{opt}(i)$ zu berechnen, muss man zwei Fälle betrachten: (1) Intervall i wird nicht verwendet, (2) Intervall i wird verwendet.

   (i) Welchen Wert besitzt $\textsc{opt}(i)$, wenn Intervall I_i nicht verwendet wird?

   (ii) Angenommen, Intervall I_i wird benutzt. Wir sind an dem Index des Intervalls interessiert, welches das letzte Intervall vor I_i ist, das nicht mit I_i überlappt. Den Index dieses *Vorgängers von* I_i bezeichnen wir als $\text{pred}(i)$. Sollte I_i keinen Vorgänger besitzen, gilt $\text{pred}(i) = 0$.

   Gib einen mathematischen Ausdruck an, der $\text{pred}(i)$ für beliebiges $1 \leq i \leq n$ bestimmt.

   (iii) Welchen Wert besitzt $\textsc{opt}(i)$, wenn Intervall I_i verwendet wird?

   (iv) Stelle eine Rekursionsgleichung auf, die $\textsc{opt}(i)$ für beliebiges $0 \leq i \leq n$ bestimmt.