VL 2
19.04.2018

Weitere Varianten:

Problem 1.3 ("Fractional Knapsack") Teilpunkte!

Gegeben: • n Objekte $1,\dots,n$ mit jeweils:

Größe $z_i > 0$

Gewinn $p_i > 0$

• Größenschranke Z

Gesucht: Für jedes Objekt ein Wert $x_i \in [0,1]$ ← „Teillösung",

so dass
$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \le Z$$
und $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ größtmöglich

Beobachtung: Relativ einfach lösbar!

Algorithmus 1.4 Greedy-Algorithmus

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0,1]^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \le Z$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ größtmöglich

1. Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend; dies ergibt Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$. Setze $j=1$.

2. WHILE $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z \right)$ DO

   $x_j := 1$;
   $j := j+1$;

   Solange möglich: Wähle wertvolle Objekte

3. Setze $x_j := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

   Wähle möglichen Anteil des ersten Objektes, das nicht mehr ganz passt

4. RETURN

Satz 1.5

Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3

Beweisidee:

Betrachte eine optimale Lösung und sortiere die Größeneinheiten nach „Gewinndichte" $\frac{p_i}{z_i}$.

Dann kann diese Lösung nicht besser sein als die Greedy-Lösung, denn die maximiert jeweils die mögliche Gewinndichte!

$\square$

Im Beispiel 1.1 :

Lösung mit Wert $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$;

$x_6 = x_4 = x_{13} = x_{12} = x_9 = x_3 = 1$

$x_{15} = 0{,}6$

$x_8 = x_{16} = x_{10} = x_1 = x_{14} = x_5 = x_{11} = x_2 = x_7 = 0$.

Aber: Fraktional nicht immer möglich !!

Andere Variante:

PROBLEM 1.6 (Integer Knapsack)

Gegeben : • n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils:

Größe z_i

Gewinn p_i

• Größenschranke Z

Gesucht : Jeweils $x_i \in \mathbb{N}$ mit ← Vielfachheit

$\sum_{i \in I}^{n} z_i x_i \leq Z$

$\sum_{i \in I}^{n} p_i x_i$ maximal

Spezialfälle!

- Alle Gewinndichten gleich!

PROBLEM 1.7

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i $(= p_i!)$
- Größenschranke Z

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

$$\sum_{i \in S} z_i \text{ maximal}$$

Spezialfall davon:

PROBLEM 1.8 ("SUBSET SUM")

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Zielgröße Z

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i = Z$$