(4) Betrachten wir den Baum

– und dabei jeweils

$S$: Positiv fixiert $(x_i = 1)$

$\bar{S}$: Negativ fixiert $(x_i = 0)$

• ← $S = \emptyset$, $\bar{S} = \emptyset$; $LB = 14$, $UB = 16$

Solange $LB \leq UB$, machen wir weiter
und $S \cup \bar{S} \neq \{1, \dots, 7\}$

$S = \emptyset$, $\bar{S} = \{1\}$ → • $x_1 = 0$ ← Berechne UB!

$x_1 = 0$ bedeutet: Objekt 1
ist ausgeschlossen

Damit Greedy für Fractional Knapsack:

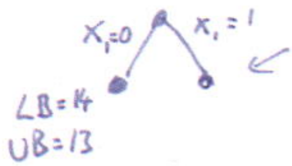
$x_2 = 1 \Rightarrow \sum x_i z_i = 3$

$x_3 = 1 \Rightarrow \sum x_i z_i = 9 \Rightarrow x_4 = \dots = x_7 = 0$

Damit ist $\sum x_i p_i = 13 < 14$

Also ist dann nicht mehr als
Nutzen 13 erreichbar; das ist
schlechter als 14, $x_1 = 0$ ist also
eine Sackgasse!

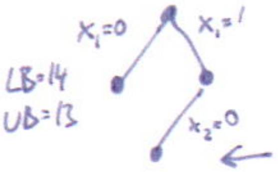
Also




Berechne $UB: 16$

Berechne $LB: 14$ (wie gehabt)

Dann




$S=\{1\}$, $\bar{S}=\{2\}$

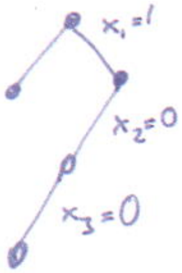
Berechne UB: $x_1=1$, $x_3=1$, $x_4=\frac{1}{7}$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15\frac{2}{7}$

Also $UB = 15$ !

Berechne LB: $x_1=1$, $x_3=1$ $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 14$

Also $LB = 14$ !

Dann




Berechne UB: $x_1=1$, $x_4=1$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15$

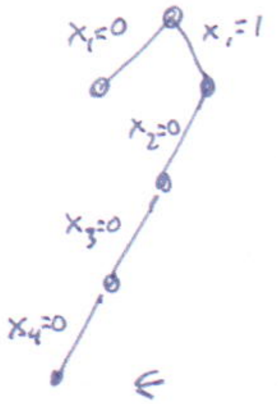
Also $UB = 15$ !

Berechne LB: $x_1=1$, $x_4=1$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 15$

Also $LB = 15$ !

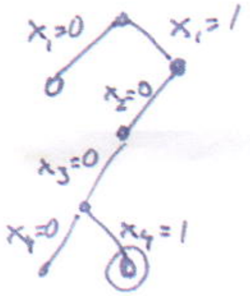
VL 7

32




Berechne UB: $x_1=1$, $x_5=1$, $x_6=\frac{2}{9}$, $\sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 13$

Das ist kleiner als 15, also Sackgasse!

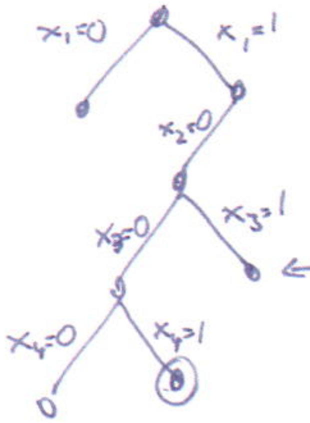



Hier (wie gesehen)
UB = LB = 15 für $S=\{1,4\}$

~~Verwendung von anderen Objekten liefert nur schlechtere Lösungen~~

Außerdem erfordert $x_1=x_4=1$ dass
$Z-\sum x_i z_i = 0$, d.h. $x_5=\ldots=x_7=0$.

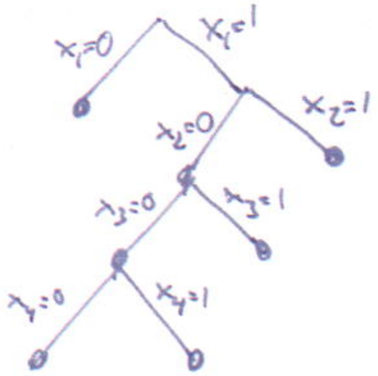
Damit:




← $Z - \sum_{i=1}^{3} x_i z_i = 1$ ← zu klein für weitere Objekte!

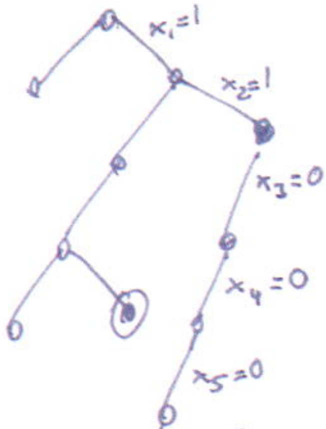
Damit $UB = 14 < 15$ !

Damit




← $Z - \sum_{i=1}^{2} x_i z_i = 4$,

Dann passt nur noch Objekt 7, also $x_3 = \ldots = x_6 = 0$




← $x_1 = x_2 = x_7$

Damit $UB = 14 < 15$

$\boxed{\text{Also Optimum: 15 ! für } S=\{1,4\}}$

## ALGORITHMUS 1.14 (BRANCH-AND-BOUND)

Übergeben: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$ (global: Kostenwerte, Kostenschranke, Nutzenwerte)

$P$ (bester bekannter Lösungswert)

$\ell$ (nächster Index, über den verzweigt wird)

$x_j = b_j$ für $j = 1, \dots, \ell-1$ mit $b_j \in \{0,1\}$ (bislang fixierte Binärvariable)

Ausgabe: $\max \left\{ \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j p_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j z_j \le Z,\ x_j \in \{0,1\} \right\}$

(Also: Lösung des Knapsackproblems mit den ersten $\ell-1$ Variablen fixiert)

Branch-and-Bound ($\ell$)

(1) IF $\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j > Z\right)$ THEN RETURN // Unzulässig

(2) IF $\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j > P\right)$ THEN // Lösung verbessert

$P := \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j$;

(3) IF $(\ell > n)$ RETURN // Blatt im Enumerationsbaum war erreicht

(4) Compute $U := UB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$; // Obere Schranke berechnen

(5) IF $(U > P)$ THEN {

$b_\ell := 0$; Branch-and-Bound$(\ell+1)$;

$b_\ell := 1$; Branch-and-Bound$(\ell+1)$;

}

(6) RETURN

Optional:

(1½) Compute $LB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$

(2) IF $LB(b_1, \dots, b_{\ell-1}) > P$

$P := LB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$

Dabei ist

$$UB(b_1, \dots, b_{\ell-1})$$

eine geeignete obere Schranke:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j p_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j p_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\ell-1} b_j z_j + \sum_{j=\ell}^{n} x_j z_j \leq Z, \; x_j \in [0,1] \right\}$$

Berechnung mit Greedy-Algorithmus 1.4 !

---

**SATZ 1.20**

ALGORITHMUS 1.19 (als rekursiv arbeitende Unterroutine) berechnet in endlicher Zeit eine Optimallösung für das Knapsackproblem. Die Worst-Case-Laufzeit beträgt $O(n\,2^n)$.

**Beweis:**

Es werden systematisch alle möglichen Teilmengen durchprobiert (und dabei Teilmengen nur dann ausgelassen, wenn sie ~~[illegible]~~ unzulässig (1) sind oder keine Verbesserung bringen (2)). Die Zahl der Rekursionsaufrufe in (5) ist insgesamt $2^n$, die sonstigen Berechnungen benötigen jeweils $O(n)$.

□