Beweis Satz 1.5:

Zunächst einmal zeigen wir, dass $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq Z$ ist

Sei j^* der letzte Index, für den die WHILE-Bedingung überprüft wird. Nach Konstruktion ist daher

$$\sum_{i=1}^{j^*-1} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} < Z$$

Außerdem ist $$x_{\pi(j^*)} = \frac{Z - \sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j^*)}},$$

also ist $$x_{\pi(j^*)} z_{\pi(j^*)} = Z - \sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)}$$

und damit $$x_{\pi(j^*)} z_{\pi(j^*)} + \sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} = Z$$

bzw. $$\sum_{i=1}^{j^*} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} = Z$$

Wegen $x_{\pi(j^*+1)} = \ldots = x_{\pi(n)} = 0$ ist somit auch

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} = Z$$

Jetzt noch zu zeigen: Die berechnete Lösung ist bestmöglich!

Beweis 1.5 (Fortsetzung)

Bisher: Lösung von Greedy ist zulässig
Jetzt: Lösung ist optimal!

Sei j^* wieder der letzte Index, für den die WHILE-Bedingung überprüft wird.

Es gilt: $0 \leq x_{\pi(j^*)} < 1$

Betrachte eine optimale Lösung $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$

Angenommen $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$.

Dann muss ein $i \geq j^*$ existieren, sodass $x^*_{\pi(i)} > x_{\pi(i)}$,

und es muss ein $j < j^*$ existieren, sodass $x^*_{\pi(j)} < x_{\pi(j)}$.

Daraus folgt, dass ein $\alpha > 0$ existiert, sodass

$$\tilde{z} := \alpha x^*_{\pi(i)} z_{\pi(i)} \leq (1 - x^*_{\pi(j)}) z_{\pi(j)}$$

Packe nun $\tilde{z}$ mehr von Objekt $\pi(j)$ und $\tilde{z}$ weniger von Objekt $\pi(i)$ in der optimalen Lösung.

Da $\frac{z_{\pi(i)}}{p_{\pi(i)}} \geq \frac{z_{\pi(j)}}{p_{\pi(j)}}$, kann sich der Wert der optimalen Lösung durch das Umpacken nicht verschlechtern.

Durch wiederholtes Umpacken gelangen wir immer näher an die Greedy Lösung, woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i \quad \lightning \text{ Widerspruch zur Annahme!}$$

$\Longrightarrow$ Greedy ist optimal $\square$