VL 2

Problem 1.2 (0-1 Rucksackproblem, "Knapsack Problem")

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils:

  Größe z_i

  Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

$$\sum_{i \in S} p_i \geq P$$

Entscheidungsproblem

Variante:

Problem 1.2' (Maximum Knapsack)

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit

  Größe z_i

  Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

$$\sum_{i \in S} p_i \text{ größtmöglich}$$

Optimierungsproblem

Einschub: Problem 1.2 und 1.2'
sind algorithmisch gleichwertig!
(→ Aufgabe auf Übungsblatt: Lösungsmethode für ein Problem liefert Methode für anderes → „Reduktion")

7

Weitere Varianten:

Teilpunkte!

Problem 1.3 („Fractional Knapsack")

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils:

  Größe $z_i > 0$
  Gewinn $p_i > 0$
- Größenschranke Z

Gesucht: Für jedes Objekt ein Wert $x_i \in [0,1]$ („Teillösung"),

so dass
$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$
und
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ größtmöglich}$$

Beobachtung: Relativ einfach lösbar!

Algorithmus 1.4

Greedy-Algorithmus

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0,1]^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{ größtmöglich}$$

① Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;
dies ergibt Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$. Setze $j=1$.

② WHILE $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z \right)$ DO

$x_j := 1$;
$j := j+1$;

Solange möglich: Wähle wertvolle Objekte

③ Setze $x_j := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

Wähle möglichen Anteil des ersten Objektes, das nicht mehr ganz passt

④ RETURN

VL 3

Satz 1.5

Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3

Beweisidee:

Betrachte eine optimale Lösung und sortiere die Größeneinheiten nach „Gewinndichte" $\frac{p_i}{z_i}$.
Dann kann diese Lösung nicht besser sein als die Greedy-Lösung, denn die maximiert jeweils die mögliche Gewinndichte!

Detaillierter: Betrachte Sortierung nach Dichte in „Zellen" in einer Optimallösung $\square$

(Diskussion mit Bildern etc.)
