1.6.2 Ein Beispiel mit Logik

Beispiel 1.34

Wir betrachten die folgende Instanz mit $n=12$ und $z_i = p_i$

sowie $Z = 111444$:

$z_1 = p_1 = 100110$
$z_2 = p_2 = 100001$
$z_3 = p_3 = 10101$
$z_4 = p_4 = 10010$
$z_5 = p_5 = 1001$
$z_6 = p_6 = 1110$
$z_7 = p_7 = 200$
$z_8 = p_8 = 100$
$z_9 = p_9 = 20$
$z_{10} = p_{10} = 10$
$z_{11} = p_{11} = 2$
$z_{12} = p_{12} = 1$

Besondere Struktur!

SUBSET SUM

Gibt es $S \subseteq \{1, \dots, 12\}$ mit $\sum_{i \in S} p_i = 111444$?

Man sieht:

(1) Man muss p_1 ODER p_2 auswählen, aber nicht beide ← 1. Ziffer
(2) Man muss p_3 ODER p_4 auswählen, aber nicht beide ← 2. Ziffer
(3) Man muss p_5 ODER p_6 auswählen, aber nicht beide ← 3. Ziffer
(4) Man muss p_1 oder p_3 oder p_6 auswählen ← 4. Ziffer
(Dann kann man mit p_7 oder p_8 eine 4 erreichen!)
(5) Man muss p_1 oder p_4 oder p_6 auswählen ← 5. Ziffer
(Mit p_9 oder p_{10} erreicht man eine 4!)
(6) Man muss p_2 oder p_3 oder p_5 auswählen ← 6. Ziffer
(4 mit p_{11} oder p_{12}.)

Setzen wir einfach einmal die Boolschen Variablen:

$$x_1 := \begin{cases} 1 & p_1 \text{ wird gewählt} \\ 0 & p_1 \text{ wird nicht gewählt} \end{cases}$$

$$x_2 := \begin{cases} 1 & p_3 \text{ wird gewählt} \\ 0 & p_3 \text{ wird nicht gewählt} \end{cases}$$

$$x_3 := \begin{cases} 1 & p_5 \text{ wird gewählt} \\ 0 & p_5 \text{ wird nicht gewählt} \end{cases}$$

Dann sehen wir:

(SUBSET SUM)

Es gibt ein $S \subseteq \{1, \dots, 12\}$ mit $\sum_{i \in S} p_i = Z$

$\Longleftrightarrow$ Wir können die logischen Variablen x_1, x_2, x_3 so wählen, dass die folgende Formel erfüllt ist

(3SAT)

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Wenn wir also ein S berechnen können, können wir eine Lösung für die logische Formel bestimmen (und umgekehrt)!

Das geht für jede logische Formel vom Typ 3SAT!

DEFINITION 1.35 (3SATISFIABILITY)

Gegeben: Eine Boolsche Formel I, bestehend aus:

- m Klauseln $c_1, \ldots, c_m$, jeweils der Form $c_j: (\ell_{j,1} \vee \ell_{j,2} \vee \ell_{j,3})$,
  wobei jedes „Literal" $\ell_{j,k}$ eine negierte oder unnegierte Variable ist:
  $$\ell_{j,k} \in \{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}$$
- n Boolsche Variable, $x_1, \ldots, x_n$

Gesucht: Eine Wahrheitsbelegung für die n Variablen, so dass für jede Klausel mindestens ein Literal WAHR ist

BEOBACHTUNG 1.36

Wenn eine 3SAT-Instanz eine erfüllende Wahrheitsbelegung hat, lässt sich eine solche leicht verifizieren.

Wenn eine 3SAT-Instanz keine erfüllende Wahrheitsbelegung hat, ist das nicht so ohne Weiteres schnell nachzuweisen.

PROBLEM 1.37 (3SAT $\in$ P?)

Gibt es für 3SAT einen Algorithmus, der für jede Instanz I in polynomieller Zeit (in m und n von I) entscheidet, ob I erfüllbar ist?

SATZ 1.38 (KNAPSACK $\in P \Rightarrow$ 3SAT $\in P$)

Wenn KNAPSACK polynomiell lösbar ist, dann ist auch 3SAT polynomiell entscheidbar.

BEWEIS:

Analog zu Beispiel 1.34: Baue aus einer 3SAT-Instanz I_{3SAT} eine Instanz I_{KN} von Knapsack mit folgenden Eigenschaften:

(A) Die Codierungsgröße von I_{KN} ist polynomiell beschränkt durch die Codierungsgröße von I_{3SAT}.

(B) Es gibt für I_{KN} eine Teilmenge mit Lösungswert Z $\Longleftrightarrow$ I_{3SAT} ist erfüllbar.

Wenn wir einen polynomiellen Algorithmus für KNAPSACK haben, dann können wir damit in polynomieller Zeit jede Instanz I_{3SAT} von 3SAT entscheiden:

(1) Baue zu I_{3SAT} eine Instanz I_{KN} von Knapsack.

(2) Löse I_{KN}.

(3) Betrachte die Lösung und verwende Eigenschaft (B), um die Lösbarkeit von I_{3SAT} zu entscheiden.

$\square$

Und jetzt der Knaller:

KOROLLAR 1.39

Wenn KNAPSACK polynomiell lösbar ist, dann gilt $P = NP$.

Denn:

SATZ 1.36 (Satz von Cook, 1971)

Wenn 3SAT polynomiell lösbar ist, dann gilt P=NP.

Beweisidee:

Man kann zeigen, dass sich jedes Problem in NP als äquivalentes 3SAT-Problem codieren lässt.

DEFINITION 1.37

(1) Ein Problem Π in NP heißt NP-vollständig, wenn $\Pi \in P \Rightarrow P = NP$ gilt.

(2) Ein Problem Π heißt NP-schwer, wenn $\Pi \in P \Rightarrow P = NP$ gilt.

Also:

KOROLLAR 1.38

(1) 3SAT ist NP-vollständig.

(2) KNAPSACK$_{\geq}$ ist NP-vollständig.

(3) KNAPSACK ist NP-schwer.

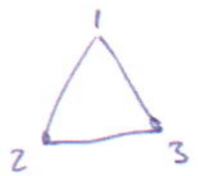
Idealer Finanzberater:

(1) ehrlicher
(2) intelligenter
(3) Investmentbanker

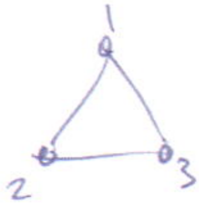
Perfekter Algorithmus:

(1) immer
(2) schnell
(3) optimale Lösung

In Zeiten der Finanzkrise:
Schnitt ist leer!



Bei NP-Vollständigkeit:
Schnitt ist leer!



Was tun in schwierigen Situationen?!

(A)	Auf Glück vertrauen	BWL
(B)	Hart arbeiten	Inf
(C)	Erwartungen herabschrauben	WiInf
(D)	Mit dem Schicksal hadern + diskutieren	Jura

Hier:

(A) Nicht „immer": Heuristiken
(B) Nicht „schnell": Exakte Algorithmen
(C) Nicht „optimal", sondern „gut": Approximationsalgorithmen
(D) Nicht NP-vollständig: Komplexitätsanalyse