1. Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;
   dies ergibt Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$. Setze $j=1$.
2. WHILE $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z \right)$ DO

   ~~$\{j \neq j+1\}$~~
   $x_j := 1$;
   $j := j+1$;

   Solange möglich: Wähle wertvolle Objekte
3. Setze $x_j := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

   Wähle möglichen Anteil des ersten Objektes, das nicht mehr ganz passt
4. RETURN

VL 3

Satz 1.5

Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3

Beweisidee:

Betrachte eine optimale Lösung und sortiere die Größeneinheiten nach „Gewinndichte" $\frac{p_i}{z_i}$.
Dann kann diese Lösung nicht besser sein als die Greedy-Lösung, denn die maximiert jeweils die mögliche Gewinndichte! $\square$

Detaillierter: Betrachte Sortierung nach Dichte in „Zellen" in einer Optimallösung (Diskussion mit Bildern etc.)

Im Beispiel 1.1:

Lösung mit Wert $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$:

$x_6 = x_4 = x_{13} = x_{12} = x_9 = x_3 = 1$

$x_{15} = 0{,}6$

$x_8 = x_{16} = x_{10} = x_1 = x_{14} = x_5 = x_{11} = x_2 = x_7 = 0$

Aber: Fraktional nicht immer möglich!!

Andere Variante:

PROBLEM 1.6 (Integer Knapsack)

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils:
  - Größe z_i
  - Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Gesucht: Jeweils $x_i \in \mathbb{N}$ mit ← Vielfachheit

$\sum_{i \in I}^{n} z_i x_i \leq Z$

$\sum_{i \in I}^{n} p_i x_i$ maximal

Spezialfall davon:

PROBLEM 1.9 ("PARTITION")

Gegeben: n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i
Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \notin S} z_i$$

1.2 Ein Beispiel

Beispiel 1.10

7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57

(Man erinnere sich an die allererste AuDI-Vorlesung!)

Gesamtsumme: 240

Also: Gibt es $S \subseteq \{1, \dots, 9\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = 120$?

Antwort: NEIN!

(Damals:

7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53)

Wie beweist man die Nichtexistenz?

Spezialfälle!

- Alle Gewinndichten gleich!

PROBLEM 1.7

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i $(= p_i!)$
- Größenschranke Z

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

$$\sum_{i \in S} z_i \text{ maximal}$$

Spezialfall davon:

PROBLEM 1.8 ("SUBSET SUM")

Gegeben:
- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Zielgröße Z

Gesucht: $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{i \in S} z_i = Z$$

Ziel: 120

Betrachte: 57 ✓ (o.B.d.A.)

57

Ziel: 63

Betrachte: 35 ?

Ziel: 28

Betrachte: 31 ×
31 ×
29 ×
20 ? → 8 ×
17 ? → 11 ×
13 ? → 15 ×
7 ? → 21 ×

Geht nicht!

57 | 35

Betrachte: 31 ?

Ziel: 32

Betrachte: 31 ×
29 ×
20 → 12 ×
17 → 15 ×
13 ×
7 ×

Geht nicht!

57 | 35 31 31

Betrachte: 29 ?

Ziel: 34

Betrachte: 20 → 14 ×
17 → 17 ×
13 ×
7 ×

Geht nicht!

57 | 35 31 31 29

> 120

(Alternative: 35 31 + 31 = 97, Ziel 23, geht nicht ...)

Also Idee:

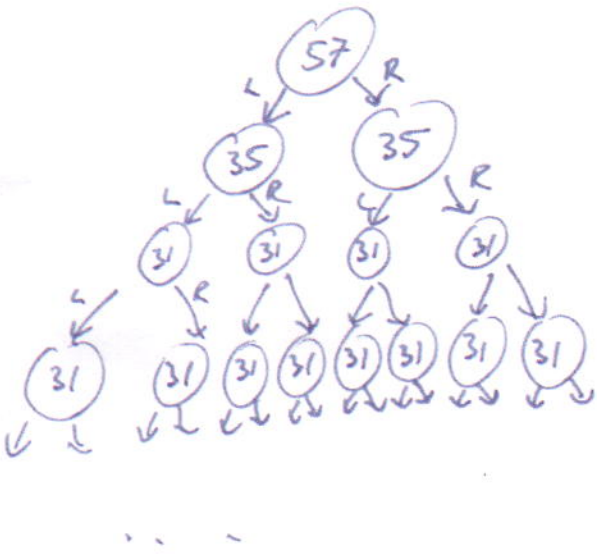
Ausprobieren, systematisch, von ~~den~~ größeren zu kleineren Zahlen

↳ Rückwärtsrekursion über verwendete Zahlen und erreichbare Werte!

Vorteil: Funktioniert

Nachteil: Probiert exponentiell viele Teilmengen durch

(Baumdarstellung:



↓ 2^n ~~K~~noten!)