Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 16**
TU Braunschweig

Dr. Frank Quedenfeld
Antje Mönch
Florian Maurer

Netzwerkalgorithmen
Übung 1 vom 20.04.2016

Abgabe der Lösungen bis Montag,
den 04.05.16, 13:00 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank.
Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen,
Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!

Aufgabe 1 (Wälder):
Beweise Lemma 2.8 aus der Vorlesung:Sei W ein Wald mit n Knoten, m Kanten und p Zusammenhangskomponenten. Zeige mit Induktion über m, dass $n = m + p$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Zusammenhang):

(a) Sei G ein Graph mit n Knoten. Angenommen, jeder Knoten von G hat mindestens Grad $(n-1)/2$. Zeige, dass G zusammenhängend sein muss.

(b) Zeige: Ein Graph G ist zusammenhängend genau dann, wenn für jede Zerlegung der Knotenmenge $V(G) = V_1 \cup V_2$ (d.h. $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) eine Kante $e = \{v, w\}$ mit $v \in V_1$ und $w \in V_2$ existiert.

(c) Zeige: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist der komplementäre Graph $\overline{G}$ zusammenhängend. (Für einen Graph $G = (V, E)$ enthält der komplementäre Graph alle zum vollständigen Graphen auf V fehlenden Kanten.)

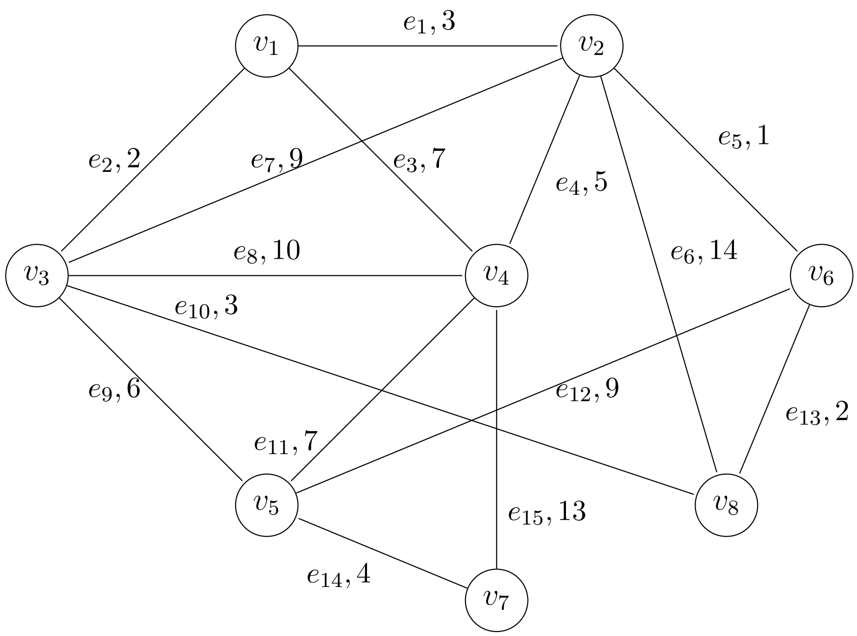
(d) Zeige: Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten hat mindestens $n-1$ Kanten.

(5+5+5+5 Punkte)

Aufgabe 3 (Kohlenwasserstoff):
Gesättigte Kohlenwasserstoffe sind Moleküle C_mH_n, in dem jedes Kohlenstoffatom C vier Verbindungen und jedes Wasserstoffatom H eine Verbindung hat und keine Sequenz von Verbindungen einen Kreis bilden.
Zeige: Für jede positive ganze Zahl m kann das Molekül C_mH_n nur dann existieren, wenn $n = 2m + 2$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Algorithmus von Kruskal):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen aufspannenden Baum. Gib dazu die Kanten in der Reihenfolge an in der sie in den Baum aufgenommen werden und zeichne die gefundene Gesamtlösung. Kommen in einem Schritt mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.
(Hinweis: Kommen beim Einfügen einer Kante in die Datenstruktur zwei Möglichkeiten in Frage, wähle die Kante, so dass sie vom Knoten mit dem kleineren Index zum Knoten mit dem größeren Index verläuft.)

(10 Punkte)

Einschub - Gerichtete Graphen: Für einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$ ist $G = (V, E)$ mit $E = \{\{v, w\} | (v, w) \in A\}$ der zu D gehörende ungerichtete Graph. Ein gerichteter Graph is zusammenhängend, wenn der ungerichtete Graph zusammenhängned ist.
Ein gerichteter Graph ist ein *Branching*, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph ein Wald ist, und jeder Knoten nur eine eingehende Kante hat. Eine *Arboreszenz* ist ein zusammenhängendes Branching. Der eindeutige Knoten in einer Arboreszenz mit Eingrad 0 ist die *Wurzel*. Ein gerichteter Graph ist *azyklisch*, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält.

Aufgabe 5 (Kürzeste r-Arboreszenzen): Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, ein Knoten r, und eine Längenfunktion $\ell : A \to \mathbb{Q}_+$.
Wir suchen eine kürzeste r-Arboreszenz (also eine in r verwurzelte Arborezenz).
Der Greedy-Algorithmus für dieses Problem lautet folgendermaßen:
Starte bei r und erweitere iterativ eine r-Arboreszenz der Teilmenge U von V durch die kürzeste Kante, die aus U herausgeht.
Liefert dieser Algorithmus eine kürzeste r-Arboreszenz? Beweise Deine Behauptung. (10 Punkte)