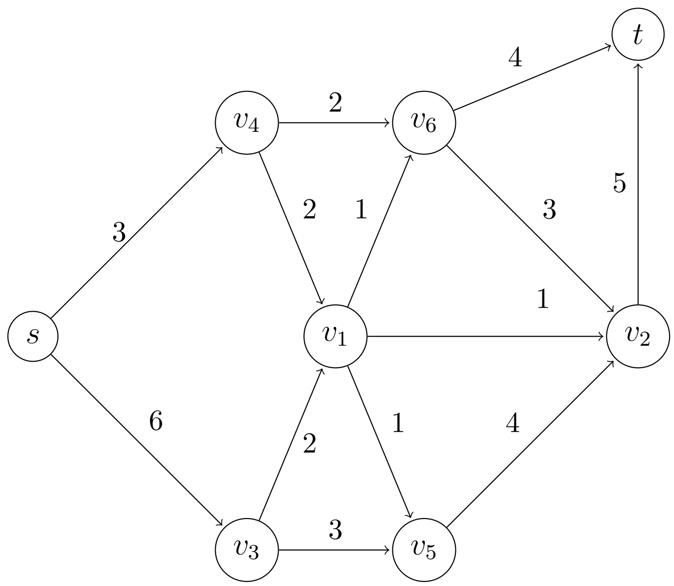
Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 16**
TU Braunschweig

Dr. Frank Quedenfeld
Antje Mönch
Florian Maurer

Netzwerkalgorithmen
Übung 4 vom 08.06.2016

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch,
den 22.06.16, 13:00 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank.
Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen,
Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!

Aufgabe 1 (Algorithmus von Ford und Fulkerson):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson einen maximalen s-t-Fluss im Netzwerk (G, u, s, t). Gib jeweils den Residualgraphen an.
Gib außerdem einen minimalen Schnitt an.

(13+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Minmax-$s-t-$Pfade):
Modifiziere den Algorithmus von Dijkstra, so dass er das Problem löst, einen Minmax-$s-t-$Pfad zu finden: Gegeben sind ein gerichteter Graph G, $c : E(G) \to \mathbb{R}$ und zwei ausgezeichnete Knoten $s, t \in V(G)$. Finde einen $s-t-$Pfad, dessen längste Kante so kurz wie möglich ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Fibonacci-Heaps):

(a) Wende die in der Vorlesung vorgestellte Funktion zum Entfernen des Minimums auf den Heap H in Abbildung 1 an. Gib alle Zwischenschritte an.

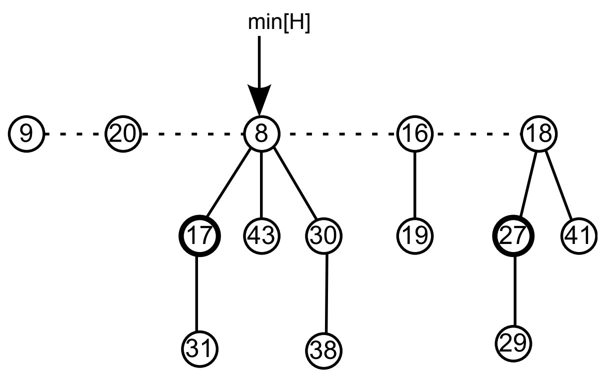


Abbildung 1: Der Heap H.

(b) Wir definieren für einen Knoten x in einem Fibonacci Heap $rank[x]$ als die Anzahl seiner Kinder. Beweise:
Sei x ein Knoten in einem Fibonacci Heap und nimm an, dass $rank[x] = k$ gilt. Seien $y_1, y_2, \ldots, y_k$ die Kinder von x, in der Reihenfolge, wie sie mit x verbunden wurden, vom frühesten zum spätesten. Dann gilt $rank[y_1] \geq 0$ und $rank[y_i] \geq i-2$ für $i = 2, 3, \ldots, k$. (Hinweis: verliert ein Knoten ein Kind, verbleibt er im Fibonacci Heap, verliert er ein zweites Kind, wird er abgeschnitten.)

(10+10 Punkte)

Aufgabe 4 (Minimale Schnitte):
Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ zwei minimale s-t-Schnitte $(X, Y \subseteq V(G))$. *Minimal* bedeutet dabei, dass es keine andere Knotenmenge $U \subseteq V(G)$, $s \in U, t \notin U$, mit $\sum_{e\in\delta^+(U)} u(e) < \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e), \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ gibt; $\delta^+(X)$ ist dabei wie in der Vorlesung definiert.

Zeige, dass dann auch $\delta^+(X \cup Y)$ und $\delta^+(X \cap Y)$ minimale s-t-Schnitte sind.

(Tipp: Zeige zunächst $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e)+\sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e) \geq \sum_{e\in\delta^+(X\cup Y)} u(e)+\sum_{e\in\delta^+(X\cap Y)} u(e)$, indem du begründest, dass jede Kante die auf der rechten Seite der Ungleichung auftaucht auch auf der linken auftauchen muss. Nutze, $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) = \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ und die Minimalität der Schnitte.)

(15 Punkte)