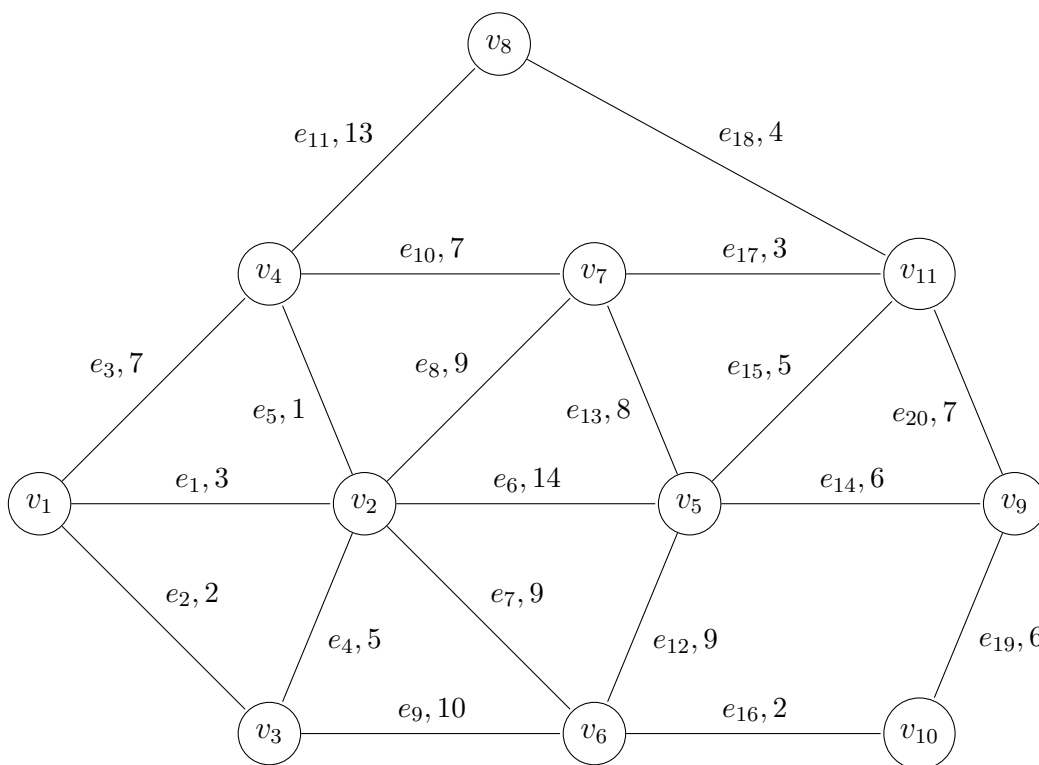


Netzwerkalgorithmen Übung 2 vom 03.05.2016

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 25.05.16, bis 13:00 Uhr in der
Abteilung *Algorithmik*.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Algorithmus von Kruskal / Prim):



- (a) Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Prim einen minimalen aufspannenden Baum; beginne dabei mit dem Knoten v_1 .
(Hinweis: Kommen während einer Iteration mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Index.)

- (b) Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen aufspannenden Baum. Gib dazu die Kanten in der Reihenfolge an in der sie in den Baum aufgenommen werden und zeichne die gefundene Gesamtlösung. Kommen in einem Schritt mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.

Verwende dabei die in der Vorlesung vorgestellte Datenstruktur und gib jeweils nach dem Einfügen einer Kante den Zustand der Datenstruktur an.

(Hinweis: Kommen beim Einfügen einer Kante in die Datenstruktur zwei Möglichkeiten in Frage, wähle die Kante, so dass sie vom Knoten mit dem kleineren Index zum Knoten mit dem größeren Index verläuft.)

- (c) Gib an, wieviele Schritte du jeweils brauchst und beschreibe, wann welcher Algorithmus besser ist.

(10 + 10 + 5 Punkte)

Aufgabe 2 (Unabhängigkeitssysteme und Matroide):

Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph G . Sei $E = E(G)$, $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \text{ ist Teilmenge eines Hamiltonkreises in } G\}$.

- (a) Zeige, dass das Mengensystem (E, \mathcal{I}) ein Unabhängigkeitssystem ist.
(b) Prüfe, ob das Mengensystem (E, \mathcal{I}) ein Matroid ist.

Sei E_2 eine endliche Menge, k eine ganze, positive Zahl und $\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E_2 : |F| \leq k\}$.

- (c) Prüfe, ob das Mengensystem (E_2, \mathcal{I}_2) ein Matroid ist.

(5+5+5 Punkte)

Aufgabe 3 (Maximale aufspannende Bäume):

Gegeben sei ein Netzwerk (G, w) . Wir suchen jetzt nach einem aufspannenden Baum dessen Gewicht unter allen aufspannenden Bäumen für (G, w) maximal ist. Ein aufspannender Baum T ist maximal für (G, w) genau dann wenn T minimal ist für $(G, -w)$.

Für ein Netzwerk (G, w) mit einem zusammenhängenden Graphen G sei $W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$ ein Pfad. Dann bezeichnen wir mit $c(W) = \min\{w(e_i) : i = 1, \dots, n\}$ die *Kapazität* von W .

Zeige: Ein gerichteter aufspannender Baum mit maximalem Gewicht in einem Netzwerk (G, w) auf einem Digraphen G beinhaltet nicht notwendigerweise Pfade maximaler Kapazität (von der Wurzel zu allen anderen Knoten).

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Branchings und Arboreszenzen):

Wir betrachten drei Probleme:

(A) gewichtsmaximales Branching Problem:

Gegeben: ein gerichteter Graph G , Gewichte $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: Finde ein gewichtsmaximales Branching in G .

(B) gewichtsm minimale Arboreszenz Problem:

Gegeben: ein Digraph G , Gewichte $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: Finde eine gewichtsm minimale Arboreszenz in G oder entscheide, dass keine existiert.

(C) gewichtsm minimale verwurzelte Arboreszenz Problem:

Gegeben: ein Digraph G , ein Knoten $r \in V(G)$, Gewichte $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: Finde eine gewichtsm minimale Arboreszenz in G , die in r verwurzelt ist, oder entscheide, dass keine existiert.

Zeige, dass die Probleme (A), (B) und (C) alle äquivalent sind.

(10 Punkte)