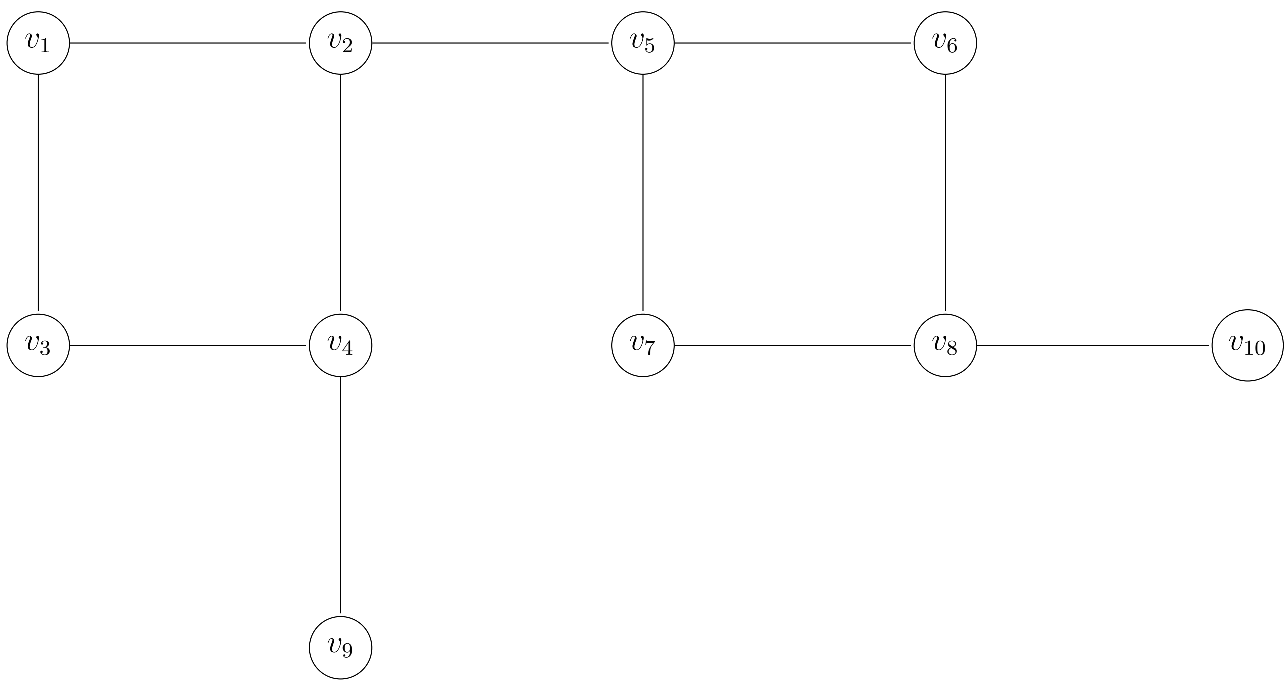
Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 15**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Frank Quedenfeld

Netzwerkalgorithmen
Übung 6 vom 06.07.2015

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben!

Aufgabe 1 (Matching zum Ersten):



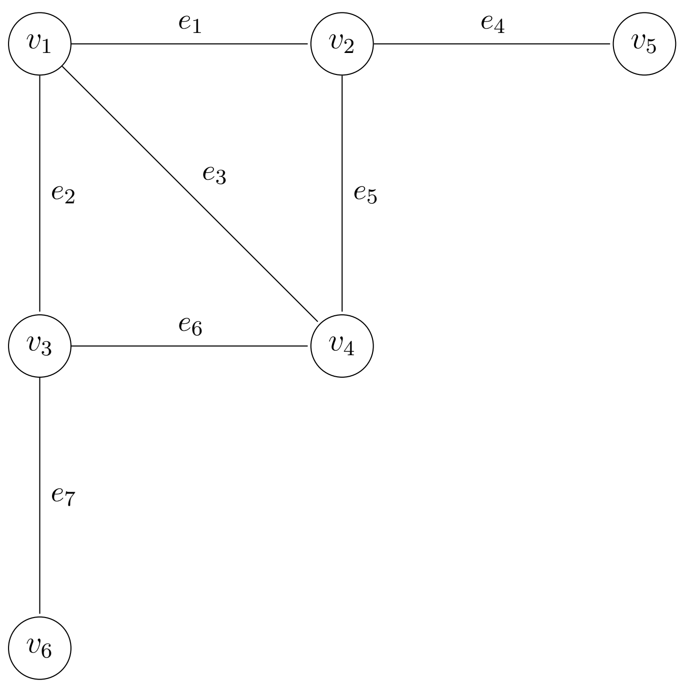
(a) Ist dieser Graph bipartit? Begründe deine Aussage.

(b) Existiert für den Graphen G ein perfektes Matching? Begründe deine Aussage.

(c) Bestimme ein maximales/perfektes Matching in G.

Aufgabe 2 (3-reguläre Graphen): Ein Graph heißt 3-regulär, wenn jeder Knoten Grad 3 hat. Eine *Brücke* in einem Graphen ist eine Kante, nach deren Entfernen sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um eins vergrößert hat.
Zeige: Jeder 3-reguläre Graph ohne Brücke enthält ein perfektes Matching.
(Tipp: Verwende den Satz von Tutte. Betrachte eine beliebige Menge $A \subset V$. Entfernt man A aus G zerfällt der Graph in gerade und ungerade Komponenten. Seien $S_1, \dots, S_t$ die ungeraden Komponenten. Zeige $\delta(S_i) \geqslant 3 \, \forall i = 1, \dots, t$. Folgere daraus, dass $|A| \geqslant oc(G \backslash A)$ gelten muss.)

Aufgabe 3 (Blossom-Algorithmus):



(a) Ist der Graph bipartit? Begründe deine Aussage.

(b) Betrachte das Matching $M = \{e_2, e_5\}$.

Entscheide mit Hilfe vom Blossom-Algorithmus aus der Vorlesung, ob G ein perfektes Matching hat oder nicht. Starte dabei mit dem Matching M. Gib nach jeder

- *Augmentierung* das neue Matching
- *Baum-erweitern-Operation* den neuen Baum
- *Schrumpfung* den neuen Baum und den Graphen G'

an.

Wähle dabei immer den ungematchten Knoten mit dem kleinsten Index als Startknoten für den Baum. Kommen bei der Auswahl der Kante in Schritt 3 vom Blossom-Algorithmus mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.

Aufgabe 4 (Matching und Vertex Cover):
In bipartiten Graphen gilt $\nu(G) = \tau(G)$ (siehe Vorlesung). Im Allgemeinen gilt $\nu(G) \leq \tau(G)$. ($\nu(G)$ gibt die Größe eines optimalen Matchings, $\tau(G)$ die Größe eines optimalen Vertex Covers an.)

(a) Gib einen Graphen an, für den $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).

(b) Gib eine Graphenklasse an (also Graphen mit beliebig vielen Knoten!), für die $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).