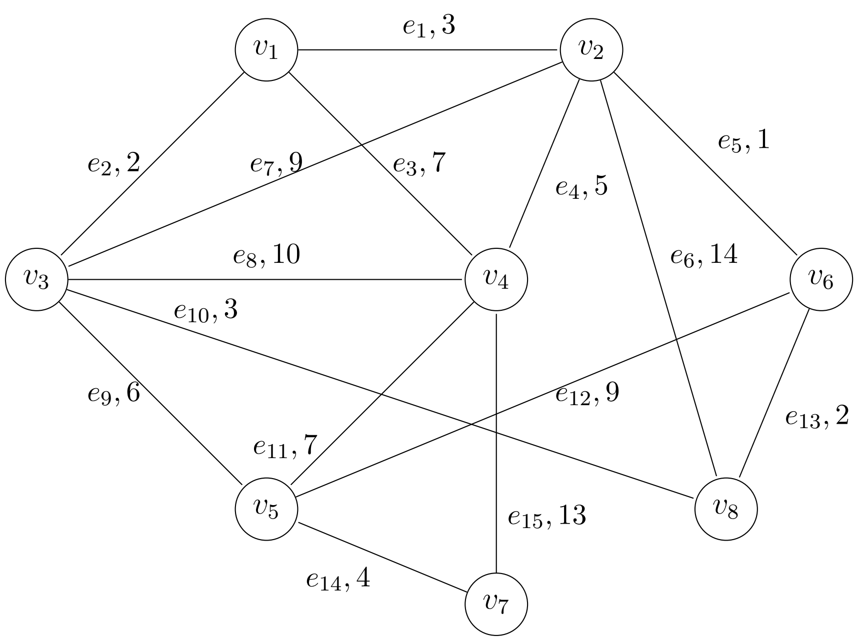
Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 15**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Frank Quedenfeld

Netzwerkalgorithmen
Übung 2 vom 04.05.2015

Abgabe der Lösungen bis Montag,
den 18.05.15, 13:00 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank.
Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen,
Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!

Aufgabe 1 (Algorithmus von Prim):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Prim einen minimalen aufspannenden Baum; beginne dabei mit dem Knoten v_1. (Hinweis: Kommen während einer Iteration mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Index.)

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Zentrum eines Baumes): Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend. Für $u \in V$ setzen wir $r(u) = \max\{d(u, v) | v \neq u\}$. Der Parameter $r(G) = \min\{r(u) | u \in V\}$ heißt *Radius* von G und $Z(G) = \{u \in V | r(u) = r(G)\}$ das *Zentrum* von G.
Zeige, dass das Zentrum eines Baumes entweder aus einer Ecke oder zwei benachbarten Ecken besteht. Was passiert, wenn ein Kreis in G vorliegt?

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Bäume): Seien (V, T_1) und (V, T_2) zwei Bäume auf derselben Knotenmenge V. Zeige: Für jede Kante $e \in T_1$ existiert eine Kante $f \in T_2$, so dass sowohl $(V, (T_1 \backslash \{e\}) \cup \{f\})$ als auch $(V, (T_2 \backslash \{f\}) \cup \{e\})$ Bäume sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Minimal aufspannende Bäume):
Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$. Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
Wenn es in G einen Kreis mit eindeutiger leichtester Kante e (= Kante mit geringstem Gewicht) gibt, dann ist e in jedem minimalen aufspannenden Baum enthalten.

(10 Punkte)

Aufgabe 5 (Zweitbester MST):
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit $|E| \geq |V|$ und der Gewichtsfunktion $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$, wobei die Kantengewichte *paarweise verschieden* sind. Im Folgenden bezeichne $w(T)$ das Gewicht eines aufspannenden Baumes T.
Ein zweitbester minimaler aufspannender Baum ist wie folgt definiert. Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller aufspannenden Bäume in G und T' ein minimaler aufspannender Baum von G. Dann ist ein zweitbester minimaler aufspannender Baum ein aufspannender Baum T, für den $w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} \backslash T'}\{w(T'')\}$ gilt.
Zeige: Der minimale aufspannende Baum in G ist eindeutig, während dies für den zweitbesten minimalen aufspannenden Baum nicht notwendigerweise der Fall ist.

(15 Punkte)