Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 15**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Frank Quedenfeld

Netzwerkalgorithmen
Übung 1 vom 20.04.2015

Abgabe der Lösungen bis Montag,
den 04.05.12, 13:00 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank.
Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen,
Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!

Aufgabe 1 (Zusammenhang):

(a) Sei G ein Graph mit n Knoten. Angenommen, jeder Knoten von G hat mindestens Grad $(n-1)/2$. Zeige, dass G zusammenhängend sein muss.

(b) Zeige: Ein Graph G ist zusammenhängend genau dann, wenn für jede Zerlegung der Knotenmenge $V(G) = V_1 \cup V_2$ (d.h. $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) eine Kante $e = \{v, w\}$ mit $v \in V_1$ und $w \in V_2$ existiert.

(c) Zeige: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist der komplementäre Graph $\overline{G}$ zusammenhängend. (Für einen Graph $G = (V, E)$ enthält der komplementäre Graph alle zum vollständigen Graphen auf V fehlenden Kanten.)

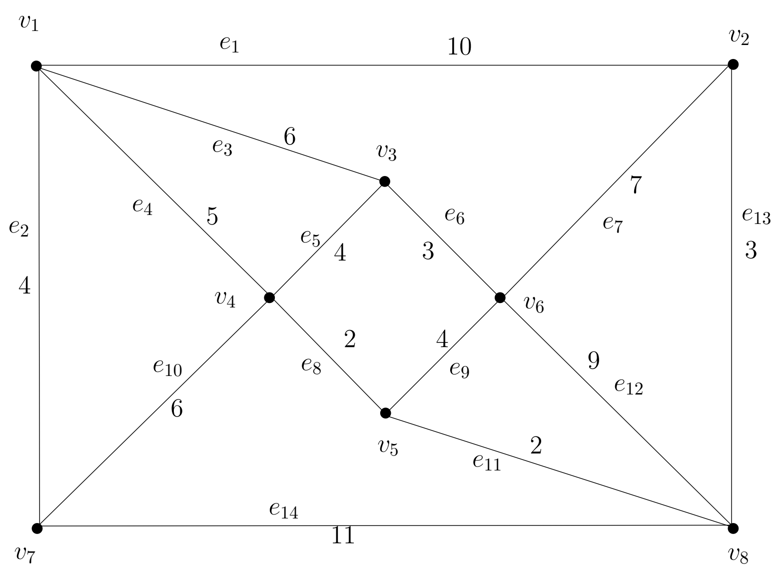
(d) Zeige: Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten hat mindestens $n-1$ Kanten.

(5+5+5+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Wälder):
Ein Wald ist ein kreisfreier (nicht notwendigerweise zusammenhängender) Graph, d.h. ein Wald besteht aus einem oder mehreren Bäumen.
Beweise den folgenden Hilfssatz aus der Vorlesung: Sei W ein Wald mit n Knoten, m Kanten und p Zusammenhangskomponenten. Zeige mit Induktion über m, dass $n = m+p$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Algorithmus von Kruskal):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen aufspannenden Baum. Gib dazu die Kanten in der Reihenfolge an in der sie in den Baum aufgenommen werden und zeichne die gefundene Gesamtlösung. Kommen in einem Schritt mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.
Damit der Algorithmus von Kruskal eine Laufzeit von $O(m \log n)$ erreicht, kann man die in der Vorlesung vorgestellte Datenstruktur verwenden. Gib jeweils nach dem Einfügen einer Kante den Zustand der Datenstruktur an.
(Hinweis: Kommen beim Einfügen einer Kante in die Datenstruktur zwei Möglichkeiten in Frage, wähle die Kante, so dass sie vom Knoten mit dem kleineren Index zum Knoten mit dem größeren Index verläuft.)

(20 Punkte)

Aufgabe 4 (Satz 2.6: Eigenschaften von Bäumen):
Zeige, dass es in einem Baum (kreisfreier und zusammenhängender Graph) einen eindeutigen Pfad zwischen je zwei Knoten gibt.

(10 Punkte)