Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 13**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christiane Schmidt
Stephan Friedrichs

Netzwerkalgorithmen
Übung 6 vom 01.07.2013

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben!

Aufgabe 1 (Satz von Hall):
Zeige: Sei G ein bipartiter Graph mit $V(G) = A \mathbin{\dot\cup} B$. Dann hat G ein A überdeckendes Matching $\Leftrightarrow |\Gamma(X)| \geq |X| \ \forall X \subseteq A$.
(Dabei bezeichnet $\Gamma(X)$ die Menge der Nachbarn von Knoten in X, also $\Gamma(X) = \{v \in V(G) \setminus X : E(X, v) \neq \emptyset\}$.)

Aufgabe 2 (Blossom-Algorithmus zum Ersten):

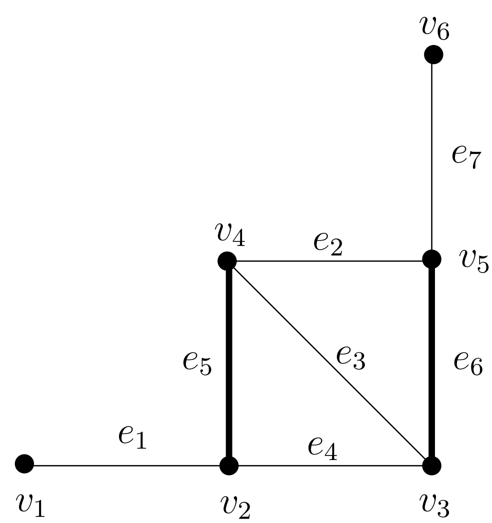

Abbildung 1: Graph G.

(a) Ist der Graph G aus Abbildung 1 bipartit? Begründe deine Aussage.

(b) Gegeben sei der Graph G aus Abbildung 1 und das Matching $M = \{e_5, e_6\}$.

Entscheide mit Hilfe vom Blossom-Algorithmus aus der Vorlesung, ob G ein perfektes Matching hat oder nicht. Starte dabei mit dem Matching M. Gib nach jeder

· *Augmentierung* das neue Matching

· *Baum-erweitern-Operation* den neuen Baum

· *Schrumpfung* den neuen Baum und den Graphen G'

an.

Wähle dabei immer den ungematchten Knoten mit dem kleinsten Index als Startknoten für den Baum. Kommen bei der Auswahl der Kante in Schritt 3 vom Blossom-Algorithmus mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.

Aufgabe 3 (Blossom-Algorithmus zum Zweiten):

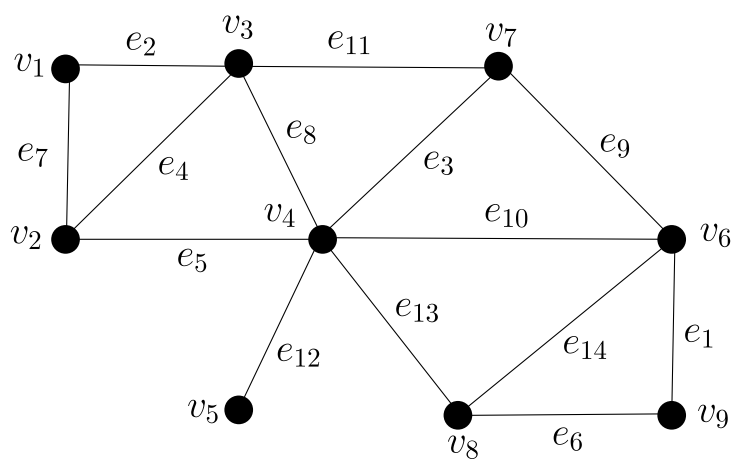

Abbildung 2: Der Graph H.

Wende den Blossom-Algorithmus an, um zu entscheiden, ob es ein perfektes Matching in H, dem Graphen aus Abbildung 2, gibt oder nicht. Wähle dabei immer den ungematchten Knoten mit dem kleinsten Index als Startknoten für den Baum. Kommen bei der Auswahl der Kante in Schritt 3 vom Blossom-Algorithmus mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.

Betrachte den konstruierten Baum, wenn der Algorithmus stoppt. Entferne die schwarzen Knoten aus G und begründe damit, dass es kein perfektes Matching gibt.

Aufgabe 4 (Perfektes Matching in bipartiten Graphen):
Ein perfektes Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Kanten, wobei zu jedem Knoten *genau eine* dieser Kanten inzident sein muss. Zeige: In einem

bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = V_1 + V_2$, in dem jeder Knoten *genau* Grad $k \geq 1$ hat, gibt es ein perfektes Matching. Verwende den Satz von Hall.

Aufgabe 5 (Matching und Vertex Cover):
In bipartiten Graphen gilt $\nu(G) = \tau(G)$ (siehe Vorlesung). Im Allgemeinen gilt $\nu(G) \leq \tau(G)$. ($\nu(G)$ gibt die Größe eines optimalen Matchings, $\tau(G)$ die Größe eines optimalen Vertex Covers an.)

(a) Gib einen Graphen an, für den $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).

(b) Gib eine Graphenklasse an (also Graphen mit beliebig vielen Knoten!), für die $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).