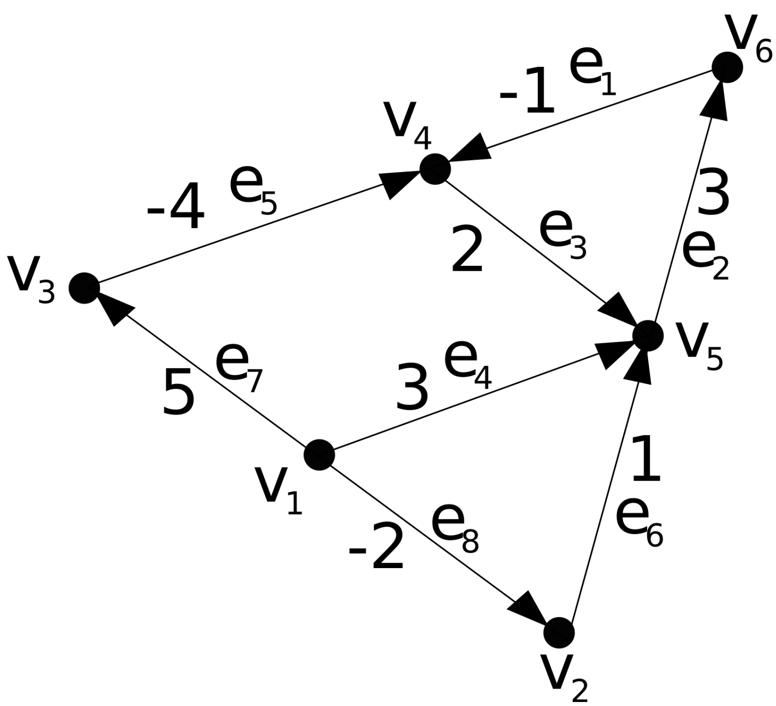
Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 13**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christiane Schmidt
Stephan Friedrichs

Netzwerkalgorithmen
Übung 4 vom 03.06.2013

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 19.06.13, bis 13:00 Uhr.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Algorithmus von Moore, Bellman und Ford):



Bestimme mit dem Moore-Bellman-Ford-Algorithmus einen kürzesten Pfad von v_1 nach v_6. Gib jeweils an, wenn sich Längenwerte oder Vorgänger ändern.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Wege und Schnitte):
Sei G ein ungerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$, wobei t von s aus erreichbar ist. Für eine Knotenmenge $X \subseteq V(G)$ nennt man die Kantenmenge $\delta(X) = \{\{x, y\} \in E(G), x \in X, y \in V(G) \setminus X\}$ einen Schnitt in G. Falls $s \in X$ und $t \notin X$ gilt, trennt $\delta(X)$ die beiden Knoten s und t.
Zeige, dass die minimale Länge eines s-t Weges gleich der maximalen Anzahl von Schnitten ist, die s und t trennen, so dass jede Kante e in höchstens $c(e)$ solcher Schnitte enthalten ist.
(Tipp: Warum reicht es, einen Graphen mit Einheitsgewichten zu betrachten? Zeige, dass die maximale Anzahl von solchen Schnitten sowohl eine obere als auch eine untere Schranke für die minimale Länge ist. Für den Beweis der unteren Schranke gib eine Menge von Schnitten an, unter der Verwendung eines BFS-Baumes.)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Wege und Zuverlässigkeit):
Gegeben sei ein Digraph G mit $s, t \in V(G)$. Jeder Kante $e \in E(G)$ wird eine Zahl $r(e) \in [0, 1]$, ihre Zuverlässigkeit, zugewiesen. Die Zuverlässigkeit eines Weges ist das Produkt der Zuverlässigkeiten seiner Kanten. Gesucht ist der Weg von s nach t mit maximaler Zuverlässigkeit.

a) Zeige, dass man dieses Problem unter Anwendung von Logarithmen auf das Kürzeste-Wege-Problem reduzieren kann.

b) Löse dieses Problem in polynomialer Zeit ohne die Anwendung von Logarithmen.

(8 + 7 Punkte)

Aufgabe 4 (Kürzeste Wege zwischen allen Knoten):
Betrachte das folgende Problem:
ALLE KÜRZESTEN WEGE
Gegeben: Gerichteter Graph G, konservative Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$.
Gesucht: Kürzeste Wege für alle $s, t \in V(G)$, d.h.

l_{st}: Länge des kürzesten $s - t-$Pfades

p_{st}: Vorgänger von t in einem kürzesten $s - t-$Pfad.

(a) Welche Laufzeit liefert Lösung des Problems mittels wiederholter Anwendung von Moore-Bellman-Ford?

(b) Betrachte den Algorithmus von Floyd und Warshall, Algorithmus 1 auf Seite 3 dieses Blattes. Welche Laufzeit hat der Algorithmus?

(c) Beweise die Korrektheit des Algorithmus von Floyd und Warshall. Hinweis: Zeige die folgende Behauptung:

Nach Durchlaufen der äußeren Schleife mit $j = 1, \ldots, j_0$ enthält die Variable l_{ik} die Länge eines kürzesten $i - k-$Pfades, der nur die Zwischenknoten $1, \ldots, j_0$ benutzt; (p_{ik}, k) ist die letzte Kante eines solchen Pfades.

Algorithm 1: Floyd, Warshall (1962)

Input : Digraph G mit konservativen Gewichten, $c : E(G) \to \mathbb{R}$

Output: Für jedes Knotenpaar $i, j \in V(G)$ die Angaben: l_{ij}: Länge des kürzesten $i - j-$Pfades, p_{ij}: Vorgänger von j in einem kürzesten Pfad.

Betrachte $V(G) = \{1, \ldots, n\}$

1.

$l_{ij} := c((i, j))$ für alle $(i, j) \in E(G)$

$l_{ij} := \infty$ für alle $(i, j) \in V(G)^2 \backslash E(G), i \neq j$

$l_{ii} := 0$ für alle $i \in V(G)$

$p_{ij} := i$ für alle $(i, j) \in E(G)$

2.

```
for j = 1 to n do
    for i = 1 to n do
        if i ≠ j then
            for k = 1 to n do
                if k ≠ j then
                    if l_ik > l_ij + l_jk then
                        l_ik := l_ij + l_jk;
                        p_ik := p_jk
```

(2+3+10 Punkte)