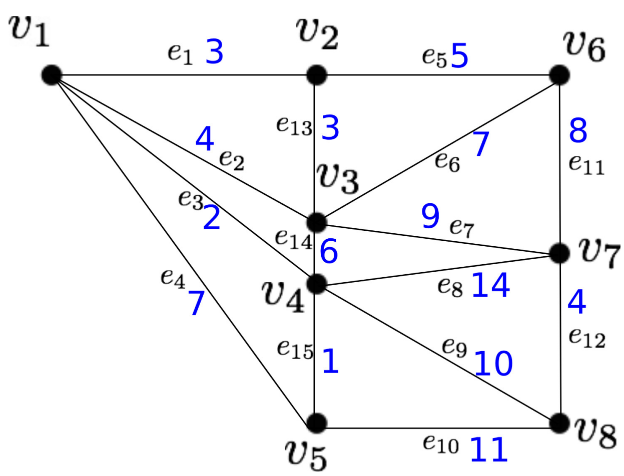
Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 13**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christiane Schmidt
Stephan Friedrichs

Netzwerkalgorithmen
Übung 2 vom 29.04.2013

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 15.05.13, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik*.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Algorithmus von Prim):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Prim einen minimalen aufspannenden Baum; beginne dabei mit dem Knoten v_1. (Hinweis: Kommen während einer Iteration mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Index.)

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Aufspannende Bäume):
Der *Baumgraph* $T(G)$ eines zusammenhängenden Graphen G hat für jeden aufspannenden Baum von G einen Knoten. Zwei dieser Bäume sind adjazent, wenn sie $|V|-2$ Kanten gemeinsam haben. Zeige, dass $T(G)$ zusammenhängend ist.

(10 Punkte)

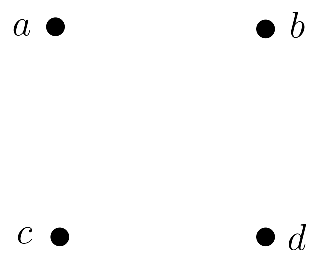
Aufgabe 3 (Bäume): Seien (V, T_1) und (V, T_2) zwei Bäume auf derselben Knotenmenge V. Zeige: Für jede Kante $e \in T_1$ existiert eine Kante $f \in T_2$, so dass sowohl $(V, (T_1 \backslash \{e\}) \cup \{f\})$ als auch $(V, (T_2 \backslash \{f\}) \cup \{e\})$ Bäume sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Minimal aufspannende Bäume):
Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$. Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
Wenn es in G einen Kreis mit eindeutiger leichtester Kante e (= Kante mit geringstem Gewicht) gibt, dann ist e in jedem minimalen aufspannenden Baum enthalten.

(10 Punkte)

Aufgabe 5 (Euklidischer Steinerbaum):
Finde eine möglichst gute Lösung der folgenden Instanz des euklidischen Steinerbaumproblems:



Dabei sind die Punkte a, b, c und d die Ecken des Einheitsquadrates. Sei S der Wert Deiner Lösung (auf vier Nachkommastellen gerundet). Welche Kantenlängen treten auf? (Hinweis: Wenn zusätzliche Steinerpunkte eingefügt werden, wie bei der Lösung für $n = 3$ aus der großen Übung, treffen sich dort genau 3 Kanten mit einem Winkel von 120° zwischen je zwei Kanten.)

(10 - (S - 2,7321)· 40 Punkte)

Aufgabe 6 (Maximale aufspannende Bäume):
Gegeben sei ein Netzwerk (G, w). Wir suchen jetzt nach einem aufspannenden Baum dessen Gewicht unter allen aufspannenden Bäumen für (G, w) maximal ist. Ein aufspannender Baum T ist maximal für (G, w) genau dann wenn T minimal ist für $(G, -w)$.

Für ein Netzwerk (G, w) mit einem zusammenhängenden Graphen G sei $W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ ein Pfad. Dann bezeichnen wir mit $c(W) = \min\{w(e_i) : i = 1, \ldots n\}$ die *Kapazität* von W.

Zeige: Ein gerichteter aufspannender Baum mit maximalem Gewicht in einem Netzwerk (G, w) auf einem Digraphen G beinhaltet nicht notwendigerweise Pfade maximaler Kapazität (von der Wurzel zu allen anderen Knoten).

(10 Punkte)