Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 13**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christiane Schmidt
Stephan Friedrichs

Netzwerkalgorithmen
Übung 1 vom 16.04.2013

Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, den 02.05.12, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik*.
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Zusammenhang):

(a) Sei G ein Graph mit n Knoten. Angenommen, jeder Knoten von G hat mindestens Grad $(n-1)/2$. Zeige, dass G zusammenhängend sein muss.

(b) Zeige: Ein Graph G ist zusammenhängend genau dann, wenn für jede Zerlegung der Knotenmenge $V(G) = V_1 \cup V_2$ (d.h. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) eine Kante $e = \{v, w\}$ mit $v \in V_1$ und $w \in V_2$ existiert.

(c) Zeige: Wenn G nicht zusammenhängend ist, dann ist der komplementäre Graph $\overline{G}$ zusammenhängend. (Für einen Graph $G = (V, E)$ enthält der komplementäre Graph alle zum vollständigen Graphen auf V fehlenden Kanten.)

(d) Zeige: Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten hat mindestens $n-1$ Kanten.

(5+5+5+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Schnitte):

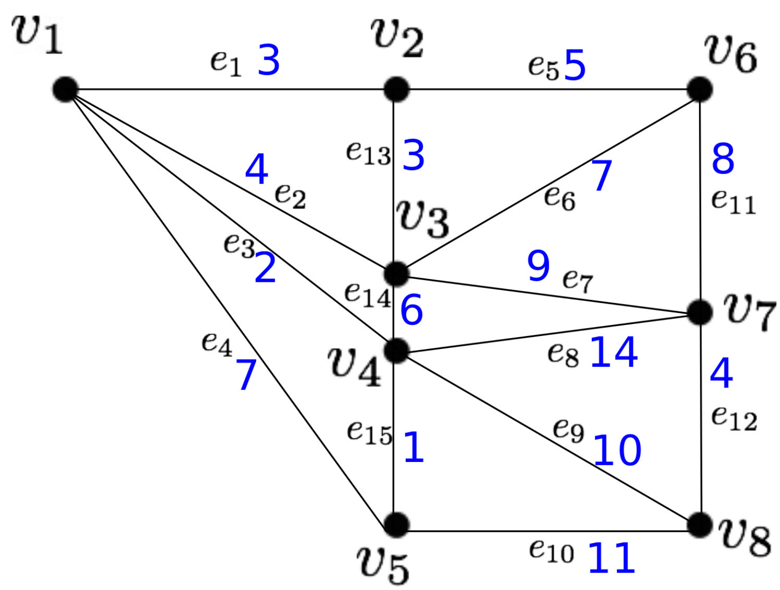
Zur Erinnerung es gilt:
Für einen G und zwei Mengen $X, Y \subseteq V(G)$ ist:
$E(X,Y) = \{\{x,y\} \in E(G) : x \in X \setminus Y, y \in Y \setminus X\}$,
$E^+(X,Y) = \{(x,y) \in E(G) : x \in X \setminus Y, y \in Y \setminus X\}$.
Für einen ungerichteten Graphen G und $X \subseteq V(G)$ ist:
$\delta(X) = E(X, V(G) \setminus X)$, $\Gamma(X) = \{v \in V(G) \setminus X : E(X, \{v\}) \neq \emptyset\}$.
Für einen Digraph G und $X \subseteq V(G)$ ist:
$\delta^+(X) = E^+(X, V(G) \setminus X)$,$\delta^-(X) = \delta^+(V(G) \setminus X)$, $\delta(X) = \delta^+(X) \cup \delta^-(X)$.
Zeige die folgenden Gleichungen:
Für einen Digraph G und zwei Mengen $X, Y \subseteq V(G)$:

(a) $|\delta^+(X)| + |\delta^+(Y)| = |\delta^+(X \cap Y)| + |\delta^+(X \cup Y)| + |E^+(X,Y)| + |E^+(Y,X)|$.

(b) $|\delta^-(X)| + |\delta^-(Y)| = |\delta^-(X \cap Y)| + |\delta^-(X \cup Y)| + |E^+(X,Y)| + |E^+(Y,X)|$.

(5+5 Punkte)

Aufgabe 3 (Algorithmus von Kruskal):



Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen aufspannenden Baum. Gib dazu die Kanten in der Reihenfolge an in der sie in den Baum aufgenommen werden und zeichne die gefundene Gesamtlösung. Kommen in einem Schritt mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.
Damit der Algorithmus von Kruskal eine Laufzeit von $O(m \log n)$ erreicht, kann man die in der Vorlesung vorgestellte Datenstruktur verwenden. Gib jeweils nach dem Einfügen einer Kante den Zustand der Datenstruktur an.
(Hinweis: Kommen beim Einfügen einer Kante in die Datenstruktur zwei Möglichkeiten in Frage, wähle die Kante, so dass sie vom Knoten mit dem kleineren Index zum Knoten mit dem größeren Index verläuft.)

(20 Punkte)

Aufgabe 4 (MSTs):

(a) Sei (G, w) ein Netzwerk, G ein zusammenhängender Graph. Sei T ein aufspannender Baum, und e eine Kante nicht in T. Fügt man e zu T hinzu entsteht ein Graph, der genau einen Kreis enthält. Diesen Kreis bezeichnen wir mit $C_T(e)$.

Zeige: Ein aufspannender Baum T von G ist minimal genau dann, wenn die folgende Bedingung von jeder Kante e in $G \backslash T$ erfüllt wird: $w(e) \geq w(f)$ für jeder Kante f in $C_T(e)$.

(b) Sei (G, w) ein Netzwerk,und v ein beliebiger Knoten. Zeige, dass jeder MST eine Kante enthalten muss, die inzident zu v ist und das kleinste Gewicht all dieser inzidenten Kanten hat.

(5+5 Punkte)