Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 13**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Christiane Schmidt
Stephan Friedrichs

Netzwerkalgorithmen
Übung 0 vom 15.04.2013

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben!
Besprechung der Aufgaben in den kleinen Übungen
am Donnerstag, 25.04.2013, und Freitag, 26.04.2013.

Ein bißchen Notation:
Ein ungerichteter Graph G ist *zusammenhängend*, wenn es für je 2 Knoten $v, w \in V(G)$ immer einen $v-w-$Pfad gibt. Ein gerichteter Graph ist zusammenhängend, wenn der ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

$G \backslash e = (V(G), E(G) \backslash \{e\})$

Für $X, Y \subseteq V(G) : E(X;Y) = \{\{x,y\} \in E(G) : x \in X, y \in Y\}$
Für $X \subseteq V(G) : \delta(X) = E(X, V(G) \backslash X)$, ist der durch X *induzierte Schnitt*.

Ein *Schnitt* in einem ungerichteten Graphen ist eine Kantenmenge vom Typ $\delta(X)$ für $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$, die also X und $V \backslash X$ trennt.

Für gerichtete Graphen:
$E^+(X,Y) = \{\{x,y\} \in E(G) : x \in X \backslash Y, y \in Y \backslash X\}$
$\delta^+(X) = E^+(X, V(G) \backslash X)$ ("von X nach $V(G) \backslash X$")
$\delta^-(X) = \delta^+(V(G) \backslash X)$ ("von $V(G) \backslash X$ nach X")

Ein *gerichteter Schnitt* ist eine Kantenmenge vom Typ $\delta^+(X)$ für $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$ mit $\delta^-(X) = \emptyset$.

Aufgabe 1 (Graphen):
Eine Kante e eines Graphen G heißt *Brücke*, wenn $G \backslash e$ $(= (V(G), E(G) \backslash \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

Ein zusammenhängender Graph heißt *unizyklisch* wenn er genau einen Kreis enthält. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) G ist unizyklisch.

(2) $G\backslash e$ ist ein Baum für eine geeignete Kante e.

(3) G ist zusammenhängend, und die Anzahl der Knoten entspricht der Anzahl der Kanten.

(4) G ist zusammenhängend, und die Menge aller Kanten von G die keine Brücken sind formt einen Kreis.

Aufgabe 2 (Zusammenhang):
Zeige: Aus jedem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ kann man einen Knoten (samt den daranhängenden Kanten) entfernen, so dass der Graph zusammenhängend bleibt.
(Hinweis: Betrachte den Endknoten eines längsten Pfades in G.)

Aufgabe 3 (Zusammenhang und Schnitte):
Zeige:

(i) Ein ungerichteter Graph ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \delta(X) \neq \emptyset \ \forall \ \emptyset \neq X \subsetneqq V(G)$.

(ii) Sei G ein gerichteter Graph und $r \in V(G)$. Dann gibt es einen r-v-Pfad für jeden Knoten $v \in V(G) \Leftrightarrow \delta^+(X) \neq \emptyset$ für jedes $X \subsetneqq V(G)$ mit $r \in X$.

Aufgabe 4 (Pfade, Kreise etc.):

(i) Zeige: Jede Kantenfolge mit Startknoten a und Endknoten b, mit $a \neq b$, enthält einen Pfad von a nach b.

(ii) Zeige: Jede geschlossene Kantenfolge ungerader Länge enthält einen Kreis.

(iii) Wie sehen die geschlossenen Kantenfolgen gerader Länge aus, die keinen Kreis enthalten?