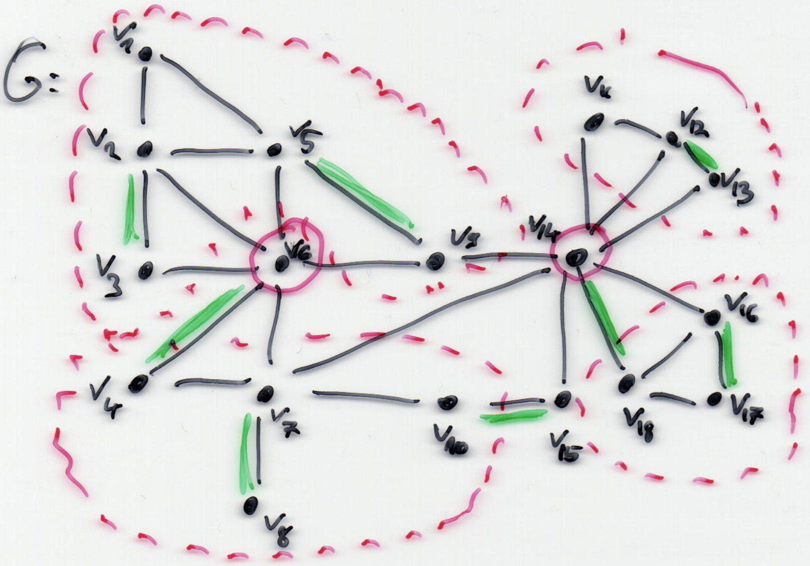
Aus alter Klausur



Maximales Matching ?

8 Kanten

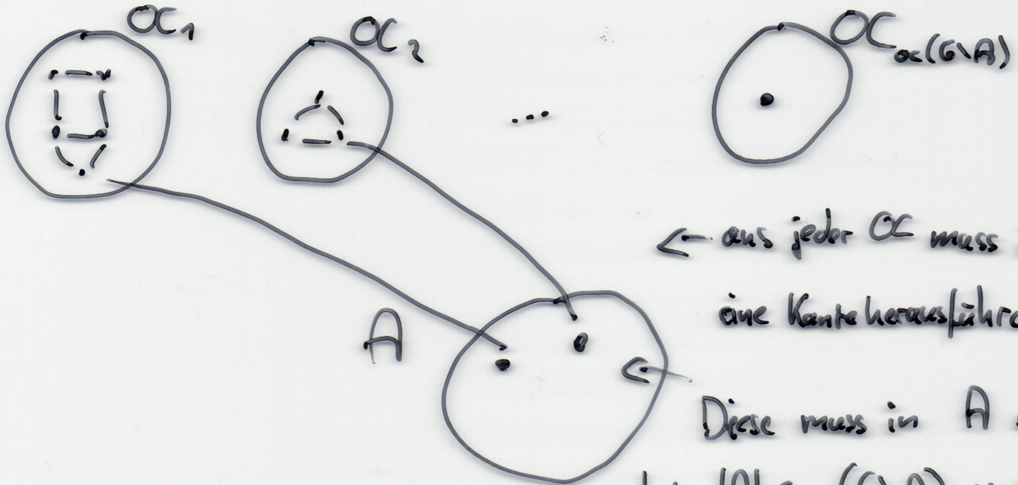
Begründe, dass jedes Matching mindestens 2 Knoten nicht enthält.

$A = \{v_6, v_{14}\}$ $\quad |A| = 2$

$oc(G \setminus A) = 4$

$oc(G \setminus A) > |A| \overset{\text{S. v. Tutte}}{\Longrightarrow}$ Es ex. kein perfektes Matching für G

Satz von Tutte: Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Dann ex. ein perf. Matching in G $\Leftrightarrow$ $oc(G \setminus A) \leq |A| \quad \forall A \subseteq V$



← aus jeder OC muss in perf. Matching eine Kante herausführen!

Diese muss in A enden.

Ist $|A| < oc(G \setminus A)$, bleiben Knoten übrig.

Allgemeiner: Tutte-Berge-Formel

Für $G=(V,E)$ gilt:

$$\max\left\{|M| \;\middle|\; M \text{ Matching von } G\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{1}{2}\left(|V| - oc(G\setminus A) + |A|\right) \;\middle|\; A \subseteq V\right\}$$

Matching in bipartiten Graphen über Flussformulierung

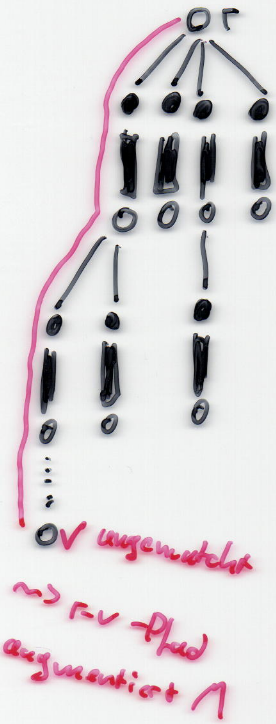
$G=(A \,\dot\cup\, B, E)$

- Lösung in $\mathcal{O}(m^2 n)$ (Edmonds-Karp)
- Wir wollen Alg., der in allgemeinen Graphen funktioniert!
- Es sollen augmentierende Pfade gefunden werden

Idee:

- Ungematchter Knoten als Wurzel r eines (Such-) Baumes T

- In T sind alle Knoten außer r gematcht



- Wenn ein ungematchter Knoten v in T eingefügt wird, soll der r-v-Pfad M-augmentierend sein

- Wenn gematchter Knoten eingefügt wird (der hat gerade Höhe in T), dann auch seinen Matching-Partner (ungerade Höhe in T)

~> keine Verzweigung bei Knoten gerader ~~Höh~~ Höhe

- Knoten ungerader Höhe: weiß ○
- " gerader " : schwarz ●
- " $\notin V(T)$: ungefärbt

Algorithmus-Idee:

① Starte mit ungematchtem Knoten v, sonst Stopp.

② Färbe v weiß, alle anderen sind ungefärbt

③ Wenn v ungematchten Nachbarn w hat: v-w ein M-augment. Pfad!

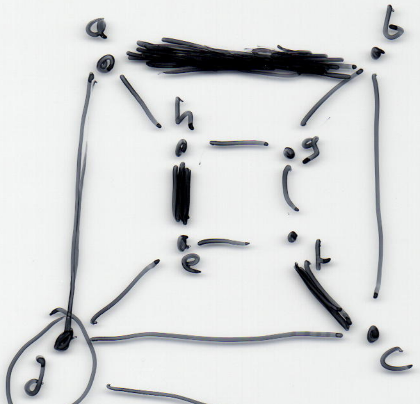
Sonst sind alle Nachbarn von v gematcht

~> färbe Nachbarn schwarz, und füge sie zu T hinzu

Füge außerdem die Matchingkanten an diesen Nachbarn zu T hinzu (weiß)

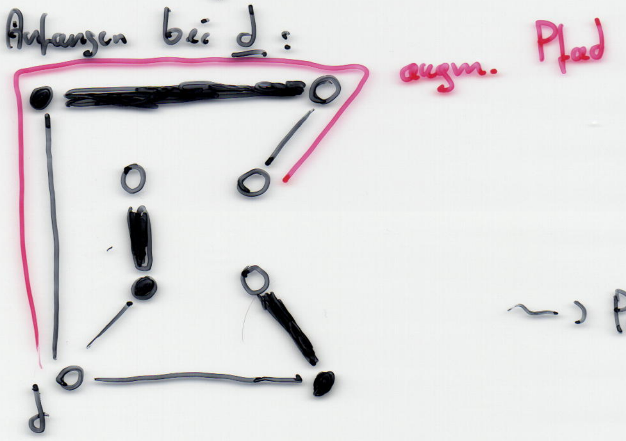
(4) Wähle einen weißen Knoten v mit ungef. Nachbarn, GOTO (3)

Beispiel



		M
a — b	→ augm.	$\{a,b\}$
c — f	→ "	$\{a,b\}, \{c,f\}$
e — h	→ "	$\{a,b\}, \{c,f\}, \{e,h\}$

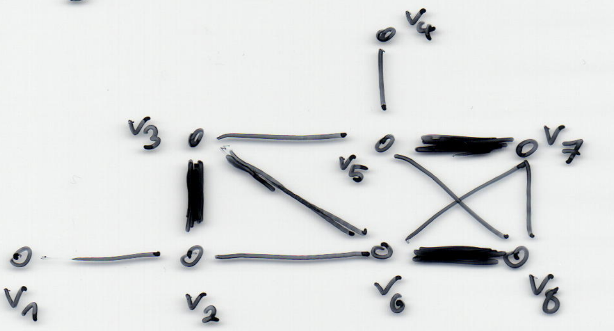
Anfangen bei d:



M: $\underbrace{\{a,d\}, \{b,g\}}_{\text{ersetzen } \{a,b\}}, \{c,f\}, \{e,h\}$

⇝ Perfektes Matching!

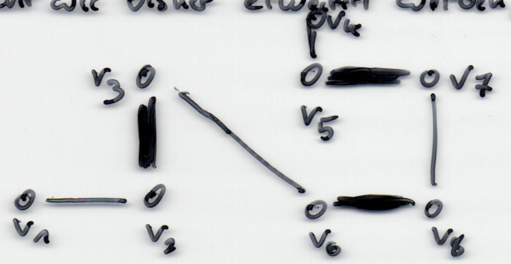
Was geht schief, wenn G nicht bipartit ist?



$\overset{T}{\rightsquigarrow}$

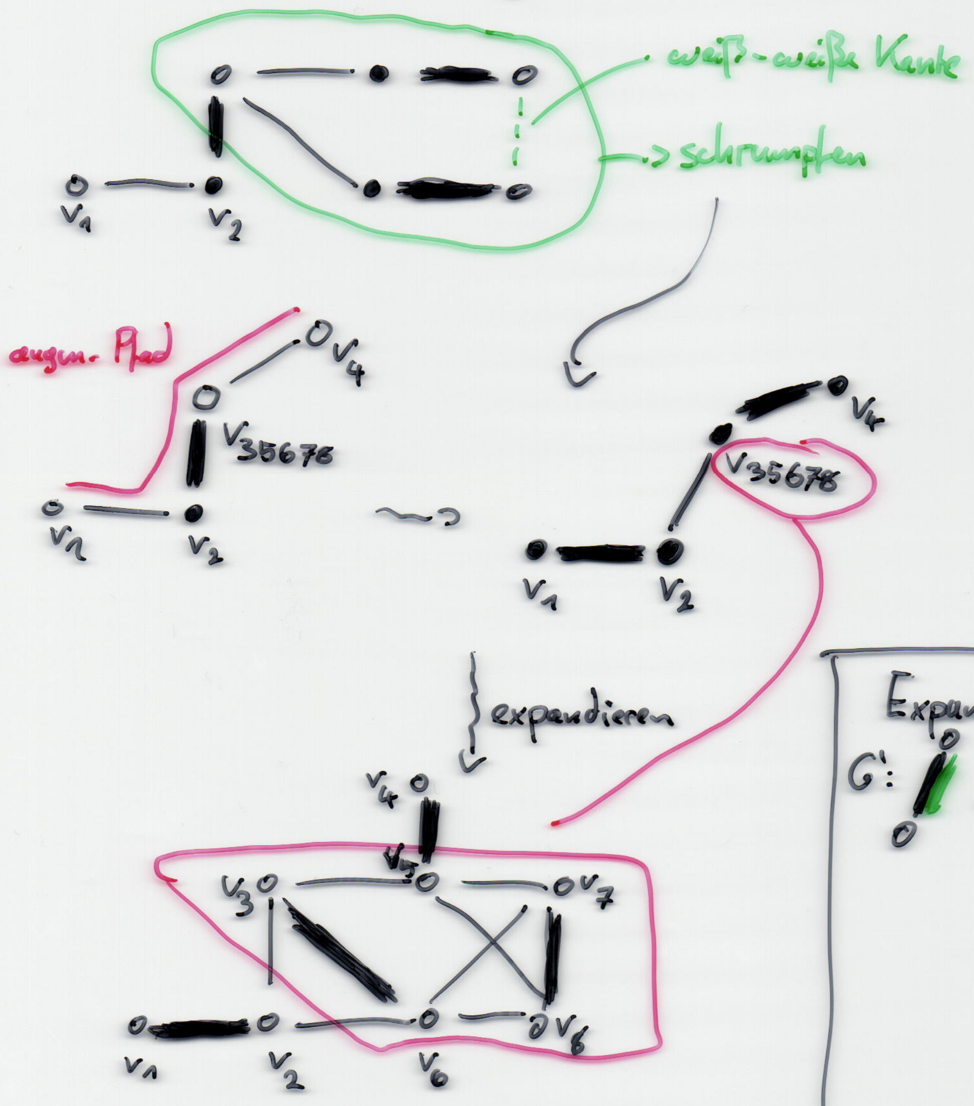
Stopp!

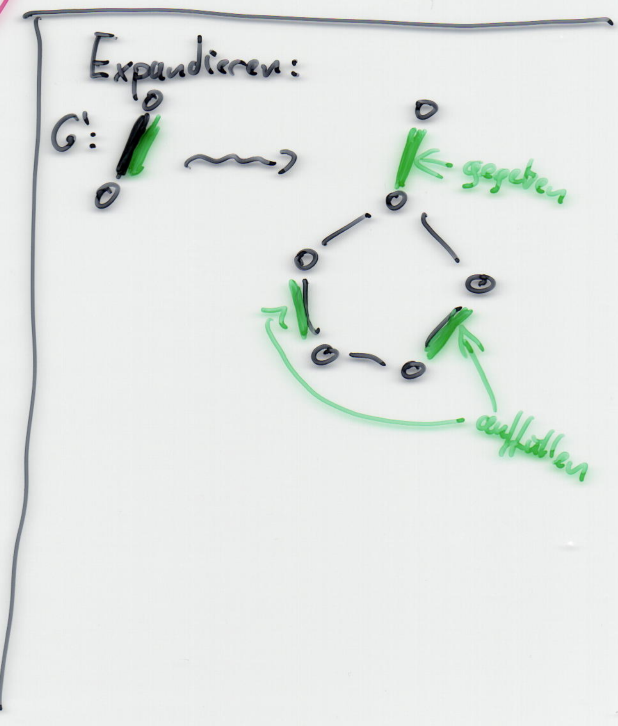
- T kann nicht wie bisher erweitert werden, obwohl es augm. Pfad gibt:



- Das liegt an den ungeraden Kreisen!

- Statt weiß-angefärbt suchen wir weiß-nichtschwarze Kanten und schrumpfen dabei die ungeraden Kreise





Max Matching = Min VC in bipartiten Graphen

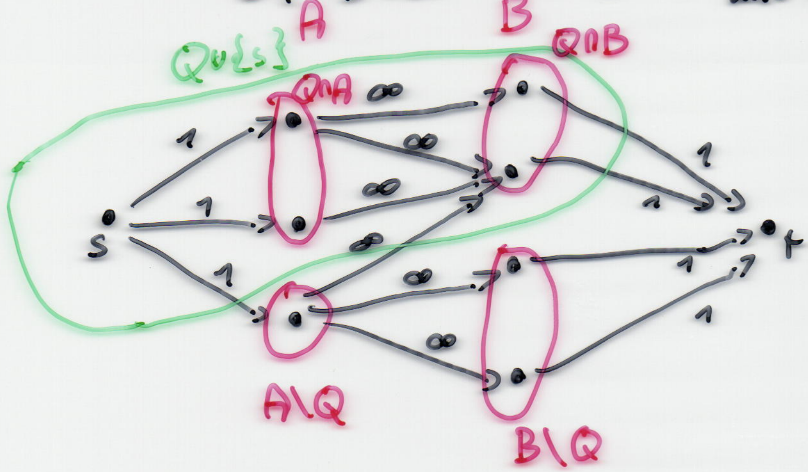
- Flussformulierung für Max. Matchings in bip. Graphen $G = (A \dot\cup B, E)$
- Sei H das konstruierte Netzwerk

z.Z.: Größe eines Max. Matchings ist gleich der Größe eines Min. VC in G

$\{s\}$ ist ein s-t Cut endlicher Kapazität

$\rightsquigarrow$ min. s-t-Cut hat auch endliche "

Sei $\delta^+(Q \dot\cup \{s\})$ der minimale s-t-Cut mit $Q \subseteq A \cup B$. Warum gibt es keine Kante $\{v, w\}$ mit $v \in Q \cap A$ und $w \in B \setminus Q$ in $\delta^+(Q \dot\cup \{s\})$?



Betrachte Min Cut $\delta^+(\{s\} \dot\cup Q)$, $Q \subseteq V$. Dieser Cut hat endliche Kapazität, d.h. es gibt keine Kante von $A \cap Q$ zu $B \setminus Q$. Welche Kanten gibt es in $\delta^+(\{s\} \dot\cup Q)$?

$A \cap Q$ zu $B \cap Q$ $\rightsquigarrow$ OK, bleibt in Q, macht den Schnitt nicht teurer

$A \cap Q$ zu $B \setminus Q$ ↯ s.o.

$A \setminus Q$ zu $B \cap Q$ $\rightsquigarrow$ OK, fährt in Q hinein

$A \setminus Q$ zu $B \setminus Q$ $\rightsquigarrow$ OK, bleibt außerhalb von Q

Folgere: $A \setminus Q$ und $B \cap Q$ sind VC von G

Jede Kante in G ist inzident zu $C = (A \setminus Q) \cup (B \cap Q)$, s.o.