MSTs + Spannbäume

Prim:

(1) Wähle $v \in V(G)$. Setze $T := (\{v\}, \emptyset)$

(2) WHILE $(V(T) \neq V(G))$ DO ← n-mal

Soll $O(n)$! (*)

Wähle eine Kante $e \in \delta_G(V(T))$ mit minimalem Gewicht.
Setze $T := T + e$

↑ Minimum muss in $O(n)$ gefunden werden – jedesmal Minimum suchen n

Korrektheit: Für jede Kante $e \in E(T)$ ist e eine billigste Kante von $\delta(V(C))$, wobei C eine Zshgs. Komponente von $T - e$ ist.

Laufzeit? $O(n^2)$

(*) Angenommen, wir haben eine Adjazenz-liste von G, d.h., es gibt für jeden Knoten eine Liste mit seinen Nachbarn und zugehörigen Entfernungen

Speichere zusätzlich in einer Liste für jeden Knoten $v \notin V(T)$ den Nachbarn $w \in V(T)$ der am günstigsten erreicht werden kann, formal

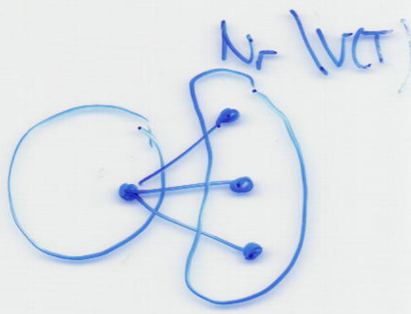
$$c(v,w) = \min\{c(v,x) : x \in V(T)\}$$, sowie die Kosten.

Liste zu Beginn, Startknoten v:

$$\text{für Knoten } u: \begin{cases} (v, c(u,v)) & \text{, falls } \{u,v\} \in E \\ (NIL, \infty) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Aufbau in $O(n^2)$

- Minimum finden: $O(n)$
- update:



Sei r der eingefügte Knoten
Betrachte alle Nachbarn N_r von r

$O(n)$ Nachbarn

Falls $t \in V_r$ günstiger zu r verbunden
→ aktualisiere Liste für t
Sonst → behalte Liste bei

} $O(1)$, da Liste Länge 2 hat + Vergleiche

Insgesamt:
$$\begin{array}{ll} & O(n) \text{ Minimum finden} \\ + & O(n) \text{ update} \\ \hline & O(n) \end{array}$$

⇒ Insges. $O(n^2)$

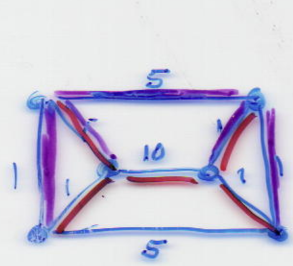
Spannbäume

* Bottleneck-Spannbäume (Klausur 2011!)

└ Geg.: ungerichteter Graph, Kantengewichte $c: E(G) \to \mathbb{R}$

Gesucht: aufspannender Baum, in dem die schwerste Kante so leicht wie möglich ist

$c_{max} = 10$



$\min_{T \in G} c_{max}$

Zeige: Ein MST ist ein Bottleneck-Spannbaum

z.z.: $\underbrace{T \text{ MST in } G}_{A} \Rightarrow \underbrace{T \text{ Bottleneck Spannbaum}}_{B}$

Wir zeigen $\neg B \Rightarrow \neg A$

Also: wir nehmen an, T ist kein Bottleneck Spannbaum eines ungerichteten Graphen G

Wir zeigen: T ist kein MST in G

Sei e die Kante mit größtem Gewicht in T.

Dann gibt es zwei Bäume T_1, T_2, so dass e die beiden verbindet.

Da T kein BST (Bottleneck Spannbaum) ist existiert eine Kante e' mit $w(e') < w(e)$, die auch T_1 und T_2 verbindet.

Sei T' der Baum $T_1 \cup T_2 \cup \{e'\}$

Wir haben $T = T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$

Sei $S(X)$ die Summe der Kantengewichte vom Baum X.

Dann gilt:

$$S(T) - S(T') = w(e) - w(e') > 0$$

$\Rightarrow$ T nicht MST in G. $\square$

ABER: Es gibt gewichtete zshgde Graphen (G, w) für die das folgende gilt:

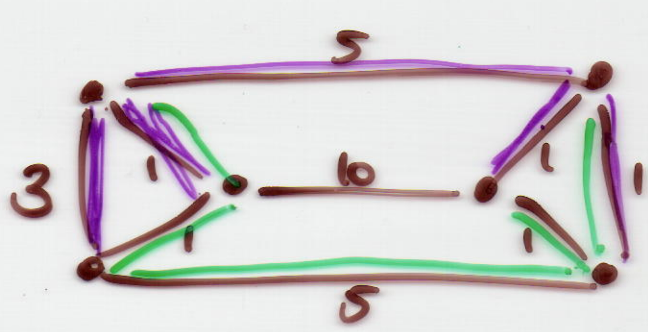
T ist aufspannender Baum von G, dessen größtes Kantengewicht minimum ist (also T ist BST)

ABER

T ist kein MST in G

Also: Nicht: $B \Rightarrow A$!!

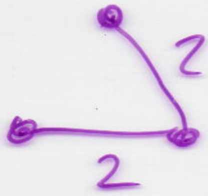
Gegenbsp.:



BST

MST

MST 3



BST 4

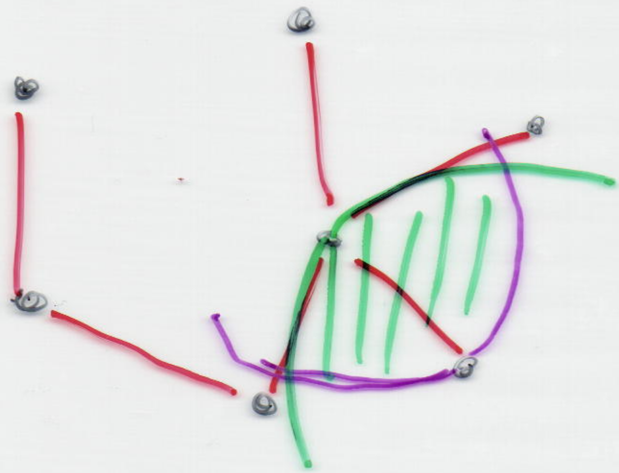
* Planare MSTs
  ↳ Punkte in der Ebene
  Gewichte: Distanz (euklidisch)
  Was kann man da zeigen?

Lemma 1: Angenommen $\{u,v\}$ ist eine Kante des MSTs einer Punktemenge in der Ebene. Dann

enthält der lune von u und v
keinen weiteren Punkt.

„Kugelzweieck"

Region innerhalb der 2 Kreise die das Segment uv als Radius haben



Beweis: Sei T ein Baum der $\{u,v\}$ enthält
Sei w ein weiterer Punkt im lune von u und v.
$\Rightarrow$ Läng von uw und von vw je kürzer als die von uv

$$c(\{u,w\}) < c(\{u,v\})$$
$$c(\{v,w\}) < c(\{u,v\})$$

Entfernen von $\{u,v\}$ aus T teilt den Baum in 2 Zshgs. Komponenten U (mit u) und V (mit v)

- w in U $\Rightarrow$ $T - \{u,v\} + \{v,w\}$ ist Baum
- w in V $\Rightarrow$ $T - \{u,v\} + \{u,w\}$ ~~ist~~ Baum

beide geringeres Gewicht als T

$\Rightarrow$ kein Punkt im Inneren von u und v.

+ Spannbaum
  - hatten Prim ($O(n^2)$), Kruskal ($O(m \lg n)$) für MST
  - Was wenn ~~nur~~ an beliebigem Spannbaum interessiert?

- DFS / BFS in $O(n+m)$