I. Steinerbäume

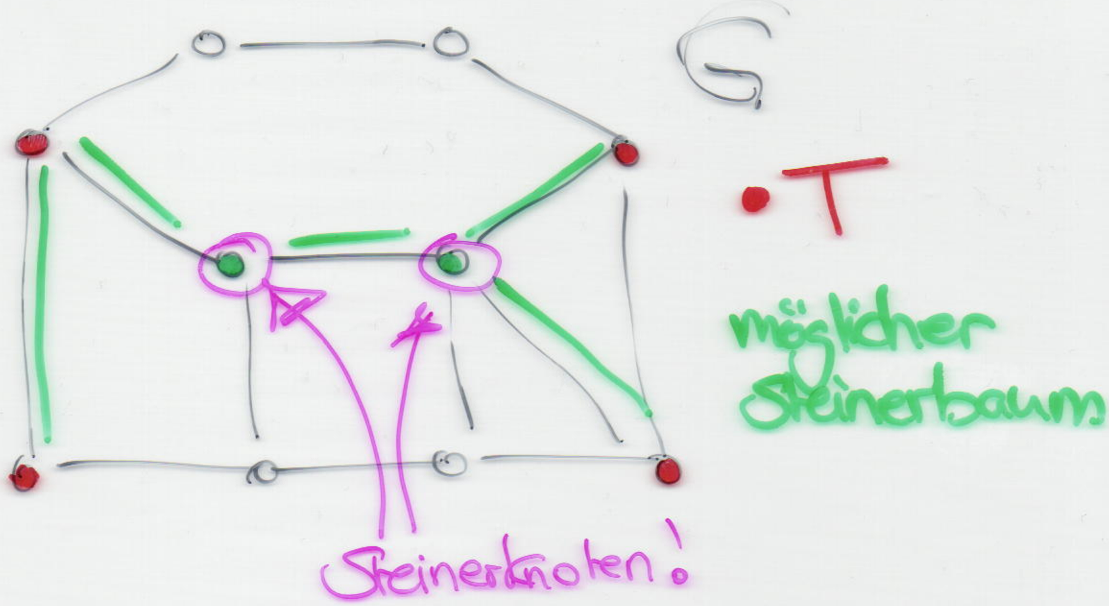
G sei ein ungerichteter Graph, $T \subseteq V(G)$.

Ein Steinerbaum für T in G ist ein Baum S mit $T \subseteq V(S) \subseteq V(G)$ und $E(S) \subseteq E(G)$.

(Jakob Steiner, Anfang 19. Jhd.)

Elemente von T – Terminals

$V(S) \setminus T$ – Steinerknoten/punkte von S



Wenn Gewichte ($c: E(G) \to \mathbb{R}_+$) gegeben:

Steinerbaum Problem:

Gesucht: Steinerbaum, dessen Gewicht ($c(E(S))$) minimum ist.

Bsp.: $\{7, 1, 2\}$ inklusionsmaximal — maximal

$\{1, 2, 3, 4\}$ maximal — maximum

Beobachtungen:

- $T = V(G) \longrightarrow$ MST
- $|T| = 2 \longrightarrow$ kürzester Weg

und: Problem ist NP-schwer (deutlich schwerer als MST-Problem!)

* Auf Graphen $\Rightarrow$ für Steinerknoten kommen ohnehin nur Knoten aus $V(G) \setminus T$ in Frage

und in Ebene?

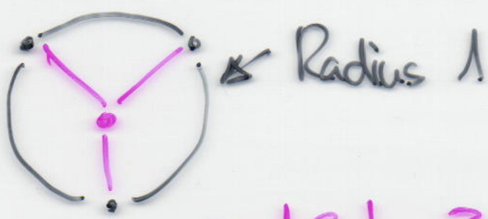
warum interessant:

Geg.: n Punkte in der Ebene

Gesuch: Telefonnetzwerk, so dass jeder mit jeden (ggf. über Zwischenstellen) kommunizieren kann und die Summe der benötigten Verb.en minimiert wird.

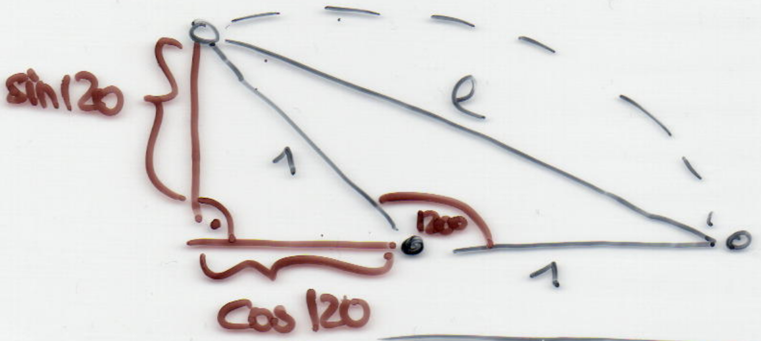
Bsp.:

Kosten?



$\Rightarrow$ Kosten 3

MST:



$$c = \sqrt{(\sin 120°)^2 + (\underbrace{|\cos 120°| + 1}_{(1-0{,}5)})^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2{,}25}$$

$$\approx 1{,}765$$

↳ Kosten MST: $2 \cdot 1{,}765 = 3{,}530$

→ teurer!

Problem geht auf Fermat zurück (Math., 17. Jhd.)

Für mehr als 3 Punkte: euklidisches Steinerbaum Problem

Man kann zeigen dass:

$$\frac{MST}{ST} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547\ldots$$

ST = Steinerbaum

MST also ca. 15% schlechter als opt. Lsg.

Was weiß man über Steinerpunkte?

- ~~kee kan Kanten~~ dort treffen sich immer genau 3 Kanten im Winkel von 120° (paarweise)

⇒ für 5 Punkte:

↳ kann nicht optimal sein!

MST:

↳ erster Algorithmus: Kruskal
* Kanten nach Gewicht sortieren
* solange Kanten noch nicht geprüft: wenn hinzufügen keinen Kreis ergibt, füge hinzu

ein Greedy-Algorithmus

→ auf speziellen Strukturen - Matroiden
- immer optimal

Matroide

↳ Namen von Matrizen, sind „wie Matrizen"

↳ Spaltenvektoren einer Matrix

Def.: Sei E eine Menge, $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ Familie von Teilmengen von E.

$(E, \mathcal{I})$ ist ein Unabhängigkeitssystem (US)

$\Leftrightarrow$ (US.1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(US.2) $I \in \mathcal{I}$, $J \subset I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$

Ein US $(E, \mathcal{I})$ ist ein Matroid

$\Leftrightarrow$ (3) $J, L \in \mathcal{I}$ und $|J| < |L|$, dann gibt es ein $e \in L \setminus J$ mit $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Zu 3 und Matrizen:

Seien $J, L \in \mathcal{I}$, $|J| < |L|$

Dann: $\dim(\text{span}(A_J)) < \dim(\text{span}(A_L))$

$\Rightarrow$ A_L enthält Vektor, der nicht in $\text{span}(A_J)$ enthalten ist, sei dies a_i

$\Rightarrow$ a_i lin. unabh. von A_J

$\Rightarrow$ $J \cup \{i\} \in \mathcal{I}$

Zu Matroiden kann man sehr viele Dinge zeigen, hier: Greedy!

└ ist für Optimierungsprobleme

└ wie sehen die aus?

> Gegeben: US $(E, \mathcal{I})$, Gewichte $w(e) \geq 0 \ \forall e \in E$
>
> Gesucht: $\max_{F \in \mathcal{I}} w(F)$ $\quad \left(w(F) := \sum_{e \in F} w(e) \right)$

Greedy:

(1) Sortiere E, so dass $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_m) \geq 0$

(2) $B = \emptyset$

(3) For $i = 1, \ldots, m$:

└ IF $B \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$ THEN $B := B \cup \{e_i\}$

(4) OUTPUT B

dann ☺

Theorem: Sei $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann gilt:

(*) Für jede Gewichtsfkt. mit $w(e) \geq 0 \ \forall e \in E$ findet Greedy eine maximum-Gewichtsbasis.

Sogar: Sei $(E, \mathcal{I})$ ein US.

$(E, \mathcal{I})$ ist Matroid $\Longleftrightarrow$ (*) gilt.

Und für unseren MST?

$E \hat{=}$ Menge der Kanten (eines zshgd. Graphen $G=(V,E)$)

$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : F$ ist aufspannender Baum$\}$

ABER: Da scheitern wir schon beim ersten Punkt! (vs. 1)

Die leere Menge ist kein aufspannender Baum

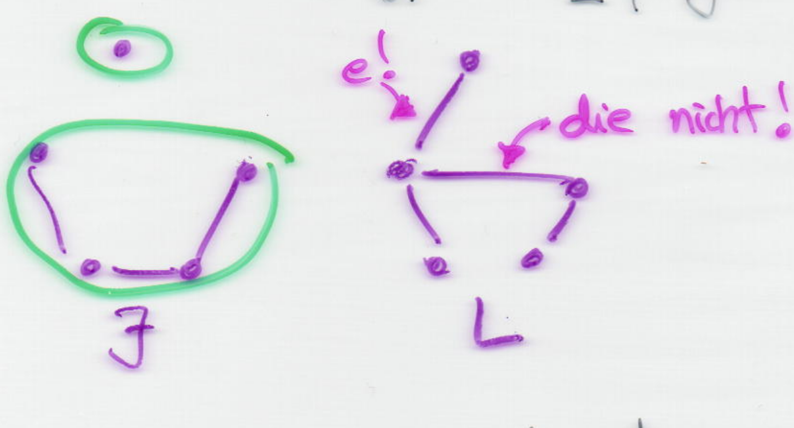
→ Neuer Versuch: wir betrachten Wälder (kreisfreie Teilmengen von E)

sehr interessant: max-Kardinalität ($\hat{=}$ Spannbäumen)

$\mathcal{I}_2 = \{ W \subseteq E : W$ ist ein Wald$\}$

- (vs. 1) ✓
- (vs. 2) $I \in \mathcal{I}_2$, $J \subset I$

  Entfernt man aus einem Wald Kanten, erhält man einen Wald $\Rightarrow J \in \mathcal{I}_2$
- (3) $J, L \in \mathcal{I}_2$, $|J| < |L|$



nicht beliebig!

Dann hat L weniger Zshgs.komponenten als J.

Also muss es in L eine Kante geben, die Knoten aus zwei verschiedenen

Komponenten in $\mathcal{F}$ enthält (Schubfachprinzip).

Sei e die Kante, die diese Zshgs.komponen verbindet, $e \in L \setminus \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F} \cup \{e\}$ ist ein Wald.

$\Rightarrow$ Wissen: Problem einen kostenmaximalen Wald zu finden kann durch Greedy gelöst werden.

[$M(G) = (E, \mathcal{I}_2)$ heißt graphischer Matroid.]

Man kann zeigen, dass die Probleme MST und kostenmax. Wald äquivalent sind.

Zurück zu Kruskal

1. $c(e_{\pi(1)}) \leq c(e_{\pi(2)}) \leq \ldots \leq c(e_{\pi(m)})$
2. Setze $T := (V(G), \emptyset)$
3. FOR $i = 1, \ldots, m$ DO

   IF ($T + e_{\pi(i)}$ enthält keinen Kreis) THEN

   $T := T + e_{\pi(i)}$

   d.h. $(V(G), E(T) \cup \{e_{\pi(i)}\})$

Korrektheit? Sei $e = \{x, y\}$ in $E(G) \setminus E(T)$.
Dann hat jede Kante auf dem x-y-Pfad in T höchstens so viele Kosten wie e.

Laufzeit? $O(m \log n)$