Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christiane Schmidt

Netzwerkalgorithmen
Übung 6 vom 04.07.2011

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben!

Aufgabe 1 (Bipartite Graphen):
Zeige: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise mit einer ungeraden Anzahl von Kanten enthält.
(Tipp: Es sind zwei Richtungen zu zeigen. Die Hinrichtung läßt sich relativ leicht durch einen Widerspruchsbeweis erledigen. Für die Rückrichtung kann man sich z.B. einen BFS-Baum in dem Graphen anschauen und daran die gesuchte Zerlegung der Knotenmenge bestimmen)

Aufgabe 2 (3-reguläre Graphen):
Ein Graph heißt *3-regulär*, wenn jeder Knoten Grad 3 hat. Eine *Brücke* in einem Graphen ist eine Kante, nach deren Entfernen sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um eins vergrößert hat.
Zeige: Jeder 3-reguläre Graph ohne Brücke enthält ein perfektes Matching.
(Tipp: Verwende den Satz von Tutte. Betrachte eine beliebige Menge $A \subseteq V$. Entfernt man A aus G zerfällt der Graph in gerade und ungerade Komponenten. Seien $S_1, \ldots, S_t$ die ungeraden Komponenten. Zeige $\delta(S_i) \geq 3$ für alle $i = 1, \ldots, t$. Folgere daraus, dass $|A| \geq oc(G \setminus A)$ gelten muss.)

Aufgabe 3 (max Matching = min VC):
Betrachte die Flussformulierung zur Bestimmung eines maximalen Matchings in einem bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$. Sei H das konstruierte Netzwerk. Insgesamt soll gezeigt werden, dass die Größe eines maximalen Matchings gleich der Größe eines minimalen Vertex Covers in G ist.

a) Wie lässt sich aus einem maximalen Matching in H ein maximaler Fluss in G bestimmen?

b) Warum gibt es einen Schnitt in H mit dem gleichen Wert wie der maximale Fluss?

c) Warum hat dieser minimale Schnitt in H endliche Kapazität?

d) Sei $\delta^+(Q \cup \{s\})$ der minimale Schnitt, mit $Q \subseteq A \cup B$. Warum gibt es keine Kante $\{v, w\}$ mit $v \in Q \cap A$ und $w \in (B \setminus Q)$ in $\delta^+(Q \cup \{s\})$?

e) Folgere daraus, dass $A \setminus Q$ und $B \cap Q$ ein Vertex Cover für G ist.

Aufgabe 4 (Perfektes Matching in bipartiten Graphen):
Ein perfektes Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Kanten, wobei zu jedem Knoten *genau eine* dieser Kanten inzident sein muss. Zeige: In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = V_1 + V_2$, in dem jeder Knoten *genau* Grad $k \geq 1$ hat, gibt es ein perfektes Matching. Benutze hierzu die Flussformulierung für bipartites Matching und argumentiere über die Größe eines minimalen s-t-Schnittes. Wende danach Max Flow = Min Cut an. Alternativ verwende den Satz von Hall.