Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christiane Schmidt

Netzwerkalgorithmen
Übung 5 vom 20.06.2011

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 04.07.11, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (gegenüber IZ 252).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Klausurvorbereitung):
Gib Deinen Namen (Format: Nachname, Vorname), Matrikelnummer und Studiengang (mit Zusatz Bachelor, Master, Diplom!) *leserlich* an.
Diese Angaben brauchen wir für die Weiterleitung der Klausurergebnisse, also gebt euch Mühe `;-)`.

(2 Punkte)

Aufgabe 2 (Ford-Fulkerson-Algorithmus und irrationale Kapazitäten):
Zeige, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus nicht terminieren muss, wenn er auf ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten angewendet wird.

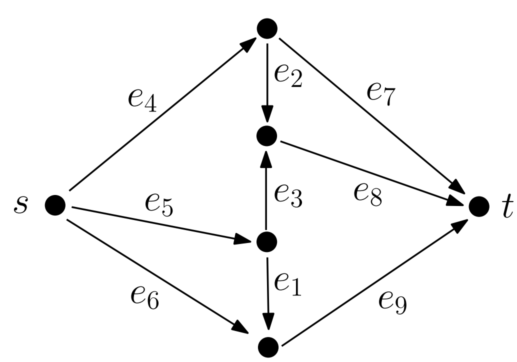

Abbildung 1: Ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten.

Betrachte dafür das Netzwerk in Abbildung 1 mit Kapazitäten $u(e_1) = 1$, $u(e_2) = \sigma$, $u(e_3) = 1$ und $u(e_4) = u(e_5) = \ldots = u(e_9) = 4$, wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Zeige zunächst $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$.
(Tipp: Betrachte die Pfade $P_1 = \{e_4, e_2, \overleftarrow{e_3}, e_1, e_9\}$, $P_2 = \{e_5, e_3, \overleftarrow{e_2}, e_7\}$, $P_3 = \{e_6, \overleftarrow{e_1}, e_3, e_8\}$ und $P_4 = \{e_5, e_3, e_8\}$. Zeige mit Induktion, dass man die *Residualkapazitäten* von e_1, e_2

und e_3 von σ^n, σ^{n+1} und 0 auf σ^{n+2}, σ^{n+3} und 0 verändern kann. Induktionsanfang: augementiere entlang von P_4. Induktionsschritt: augmentiere nacheinander entlang von P_1, P_2, P_1 und P_3.)

(18 Punkte)

Aufgabe 3 (Matching und Vertex Cover):
In bipartiten Graphen gilt $\nu(G) = \tau(G)$ (siehe Vorlesung). Im Allgemeinen gilt $\nu(G) \leq \tau(G)$.

(a) Gib einen Graphen an, für den $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).

(b) Gib eine Graphenklasse an, für die $\nu(G) < \tau(G)$, genauer $\tau(G) = 2 \cdot \nu(G)$, gilt (mit Begründung!).

(5+5 Punkte)

Aufgabe 4 (Satz von Hall):
Zeige: Sei G ein bipartiter Graph mit $V(G) = A \cup B$. Dann hat G ein A überdeckendes Matching $\Leftrightarrow |\Gamma(X)| \geq |X| \ \forall X \subseteq A$.
(Dabei bezeichnet $\Gamma(X)$ die Menge der Nachbarn von Knoten in X, also $\Gamma(X) = \{v \in V(G) \backslash X : E(X, v) \neq \varnothing\}$.)

(15 Punkte)

Aufgabe 5 (Inklusions-maximale Matchings):
Ein Matching M_0 in einem Graphen G heisst *inklusions-maximal*, falls es in G kein Matching M mit $M_0 \subset M$ gibt. Sei G ein Graph und M_1, M_2 zwei inklusions-maximale Matchings in G. Zeige, dass $|M_1| \leq 2|M_2|$ gilt. (Hinweis: Warum bilden die Knoten der Matchingkanten von M_1 und M_2 jeweils ein Vertex-Cover? Außerdem wurde in der Vorlesung gezeigt, dass jedes Matching kleiner als jedes Vertex Cover ist.)

(15 Punkte)