Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 11**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christiane Schmidt

Netzwerkalgorithmen
Übung 4 vom 06.06.2011

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 20.06.11, bis 13:00 Uhr in der
Abteilung *Algorithmik* (gegenüber IZ 252).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Negative Kreise):
Modifiziere den Algorithmus von Moore, Bellmann und Ford, so dass er für einen Graphen entscheidet, ob dieser einen negativen Kreis enthält oder nicht. Begründe die Korrektheit.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Fibonacci-Heaps):

(a) Wende die in der Vorlesung vorgestellte Funktion zum Entfernen des Minimums auf den Heap H in Abbildung 1 an. Gib alle Zwischenschritte an.

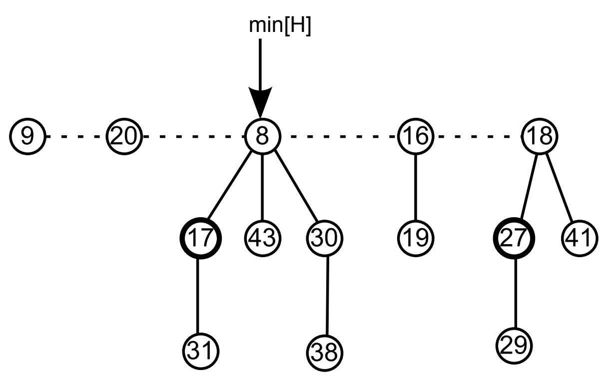

Abbildung 1: Der Heap H.

(b) Wir definieren für einen Knoten x in einem Fibonacci Heap $degree[x]$ als die Anzahl seiner Kinder. Beweise:
Sei x ein Knoten in einem Fibonacci Heap und nimm an, dass $degree[x] = k$ gilt. Seien $y_1, y_2, \ldots, y_k$ die Kinder von x, in der Reihenfolge, wie sie mit x verbunden

wurden, vom frühesten zum spätesten. Dann gilt $degree[y_1] \geq 0$ und $degree[y_i] \geq i-2$ für $i = 2, 3, \ldots, k$. (Hinweis: verliert ein Knoten ein Kind, verbleibt er im Fibonacci Heap, verliert er ein zweites Kind, wird er abgeschnitten.)

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Minimale Schnitte):
Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ zwei minimale s-t-Schnitte ($X, Y \subseteq V(G)$). *Minimal* bedeutet dabei, dass es keine andere Knotenmenge $U \subseteq V(G)$ mit $\sum_{e\in\delta^+(U)} u(e) < \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e), \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ gibt; $\delta^+(X)$ ist dabei wie in der Vorlesung definiert.

Zeige, dass dann auch $\delta^+(X \cup Y)$ und $\delta^+(X \cap Y)$ minimale s-t-Schnitte sind.

(Tipp: Zeige zunächst $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) + \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e) \geq \sum_{e\in\delta^+(X\cup Y)} u(e) + \sum_{e\in\delta^+(X\cap Y)} u(e)$, indem du begründest, dass jede Kante die auf der rechten Seite der Ungleichung auftaucht auch auf der linken auftauchen muss. Nutze, $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) = \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ und die Minimalität der Schnitte.)

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Algorithmus von Ford und Fulkerson):

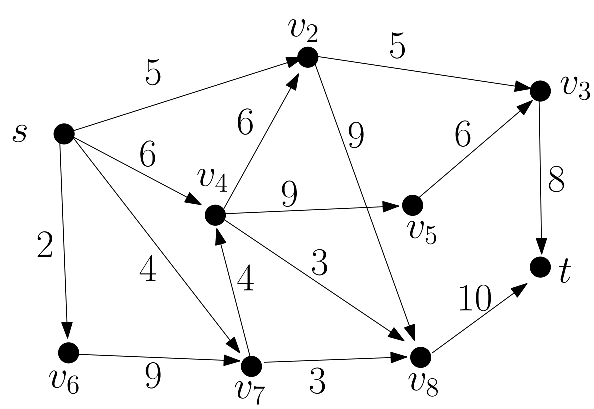

Abbildung 2: Das Netzwerk (G, u, s, t). Die Zahlen an den Kanten sind die Kapazitäten.

Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson einen maximalen s-t-Fluß im Netzwerk (G, u, s, t). Gib jeweils den Residualgraphen an.
Gib außerdem einen minimalen Schnitt an.
(Hinweis: Der Algorithmus wird in der Vorlesung am 7.6. vorgestellt.)

(15 Punkte)