

Netzwerkalgorithmen Übung 6 vom 30.06.2010

Dieses Übungsblatt wird nicht abgegeben!

Aufgabe 1 (3-reguläre Graphen):

Ein Graph heißt *3-regulär*, wenn jeder Knoten Grad 3 hat. Eine *Brücke* in einem Graphen ist eine Kante, nach deren Entfernen sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um eins vergrößert hat.

Zeige: Jeder 3-reguläre Graph ohne Brücke enthält ein perfektes Matching.

(Tipp: Verwende den Satz von Tutte aus der Vorlesung vom 29.06. Betrachte eine beliebige Menge $A \subseteq V$. Entfernt man A aus G zerfällt der Graph in gerade und ungerade Komponenten. Seien S_1, \dots, S_t die ungeraden Komponenten. Zeige $\delta(S_i) \geq 3$ für alle $i = 1, \dots, t$. Folgere daraus, dass $|A| \geq oc(G \setminus A)$ gelten muss.)

Aufgabe 2 (max Matching = min VC):

Betrachte die Flussformulierung zur Bestimmung eines maximalen Matchings in einem bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$. Sei H das konstruierte Netzwerk. Insgesamt soll gezeigt werden, dass die Größe eines maximalen Matchings gleich der Größe eines minimalen Vertex Covers in G ist.

- Wie lässt sich aus einem maximalen Matching in H ein maximaler Fluss in G bestimmen?
- Warum gibt es einen Schnitt in H mit dem gleichen Wert wie der maximale Fluss?
- Warum hat dieser minimale Schnitt in H endliche Kapazität?
- Sei $\delta^+(Q \cup \{s\})$ der minimale Schnitt, mit $Q \subseteq A \cup B$. Warum gibt es keine Kante $\{v, w\}$ mit $v \in Q \cap A$ und $w \in (B \setminus Q)$ in $\delta^+(Q \cup \{s\})$?
- Folgere daraus, dass $A \setminus Q$ und $B \cap Q$ ein Vertex Cover für G ist.

Aufgabe 3 (Perfektes Matching in bipartiten Graphen):

Ein perfektes Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Kanten, wobei zu jedem Knoten *genau eine* dieser Kanten inzident sein muss. Zeige, in einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = V_1 + V_2$ in dem jeder Knoten *genau* Grad $k \geq 1$ hat, gibt es ein perfektes Matching. Benutze hierzu die Flussformulierung für bipartites Matching und argumentiere über die Größe eines minimalen s-t-Schnittes. Wende danach Max Flow = Min Cut an.

Aufgabe 4 (Algorithmus 5.18):

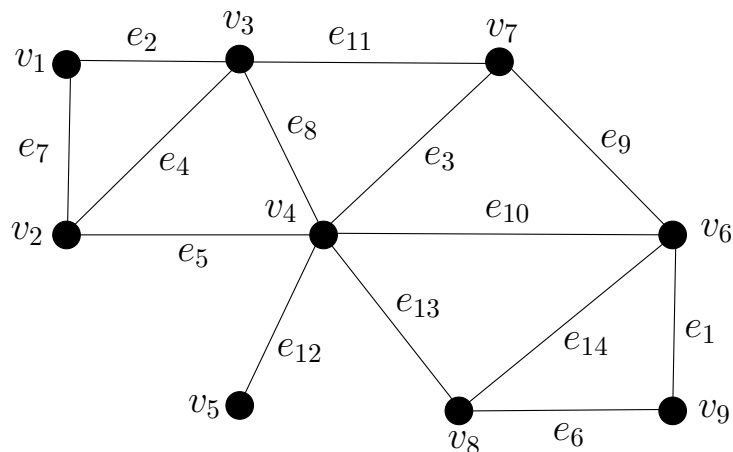


Abbildung 1: Der Graph G .

Wende Algorithmus 5.18 an, um zu entscheiden, ob es ein perfektes Matching in G gibt oder nicht. Wähle dabei immer den ungematchten Knoten mit dem kleinsten Index als Startknoten für den Baum. Kommen bei der Auswahl der Kante in Schritt 3 von Algorithmus 5.18 mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex.

Betrachte den konstruierten Baum, wenn der Algorithmus stoppt. Entferne die schwarzen Knoten aus G und begründe damit, dass es kein perfektes Matching gibt.