

Netzwerkalgorithmien Übung 5 vom 16.06.2010

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 30.06.10, bis 13:00 Uhr in der
Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Klausurvorbereitung):

Gib Deinen Namen (Format: Nachname, Vorname), Matrikelnummer und Studiengang (mit Zusatz Bachelor, Master, Diplom!) *leserlich* an.

Diese Angaben brauchen wir für die Weiterleitung der Klausurergebnisse, also gebt euch Mühe ;-).

(2 Punkte)

Aufgabe 2 (Ford-Fulkerson-Algorithmus und irrationale Kapazitäten):

Zeige, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus nicht terminieren muss, wenn er auf ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten angewendet wird.

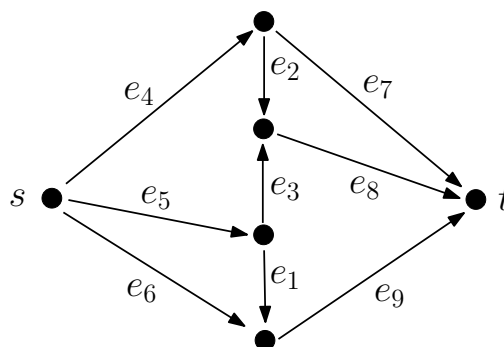


Abbildung 1: Ein Netzwerk mit irrationalen Kapazitäten.

Betrachte dafür das Netzwerk in Abbildung 1 mit Kapazitäten $u(e_1) = 1$, $u(e_2) = \sigma$, $u(e_3) = 1$ und $u(e_4) = u(e_5) = \dots = u(e_9) = 4$, wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Zeige zunächst $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$.

(Tipp: Betrachte die Pfade $P_1 = \{e_4, e_2, \overleftarrow{e_3}, e_1, e_9\}$, $P_2 = \{e_5, e_3, \overleftarrow{e_2}, e_7\}$, $P_3 = \{e_6, \overleftarrow{e_1}, e_3, e_8\}$ und $P_4 = \{e_5, e_3, e_8\}$. Zeige mit Induktion, dass man die *Residualkapazitäten* von e_1, e_2

und e_3 von σ^n , σ^{n+1} und 0 auf σ^{n+2} , σ^{n+3} und 0 verändern kann. Induktionsanfang: augmentiere entlang von P_4 . Induktionsschritt: augmentiere nacheinander entlang von P_1 , P_2 , P_1 und P_3 .)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Bipartite Graphen):

Zeige: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise mit einer ungeraden Anzahl von Kanten enthält.

(Tipp: Es sind zwei Richtungen zu zeigen. Die Hinrichtung läßt sich relativ leicht durch einen Widerspruchsbeweis erledigen. Für die Rückrichtung kann man sich z.B. einen BFS-Baum in dem Graphen anschauen und daran die gesuchte Zerlegung der Knotenmenge bestimmen (vgl. auch Beweis zu Satz 5.12 aus der VL vom 22.6.))

(15 Punkte)

Aufgabe 4 (Inklusions-maximale Matchings):

Ein Matching M_0 in einem Graphen G heisst *inklusions-maximal*, falls es in G kein Matching M mit $M_0 \subset M$ gibt. Sei G ein Graph und M_1, M_2 zwei inklusions-maximale Matchings in G . Zeige, dass $|M_1| \leq 2|M_2|$ gilt. (Hinweis: Warum bilden die Knoten der Matchingkanten von M_1 und M_2 jeweils ein Vertex-Cover? Außerdem wurde in der Vorlesung gezeigt, dass jedes Matching kleiner als jedes Vertex Cover ist.)

(15 Punkte)

Aufgabe 5 (Maximales Matching in bipartiten Graphen):

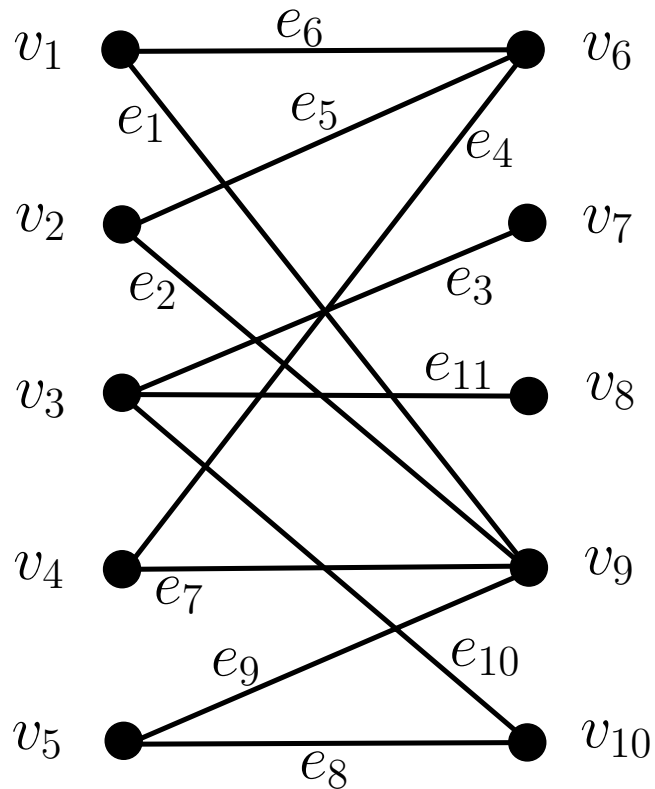


Abbildung 2: Ein Graph.

Bestimme mit Hilfe von Algorithmus 5.13 aus der VL vom 22.6. ein maximales Matching in dem Graphen G . Wähle dabei immer den ungematchten Knoten mit dem kleinsten Index als Startknoten für den Baum. Kommen bei der Auswahl der Kante in Schritt 3 von Algorithmus 5.11 mehrere Kanten in Frage, wähle die mit dem kleinsten Kantenindex. (13 Punkte)