Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 10**
TU Braunschweig

Nils Schweer
Dr. Alexander Kröller

Netzwerkalgorithmen
Übung 4 vom 02.06.2010

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 16.06.10, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Wege und Schnitte):
Sei G ein ungerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und zwei Knoten $s, t \in V(G)$, wobei t von s aus erreichbar ist. Für eine Knotenmenge $X \subseteq V(G)$ nennt man die Kantenmenge $\delta(X) = \{\{x, y\} \in E(G), x \in X, y \in V(G) \setminus X\}$ einen Schnitt in G. Falls $s \in X$ und $t \notin X$ gilt, trennt $\delta(X)$ die beiden Knoten s und t.
Zeige, dass die minimale Länge eines s-t Weges gleich der maximalen Anzahl von Schnitten ist, die s und t trennen, so dass jede Kante e in höchstens $c(e)$ solcher Schnitte enthalten ist.
(Tipp: Warum reicht es, einen Graphen mit Einheitsgewichten zu betrachten? Zeige, dass die maximale Anzahl von solchen Schnitten sowohl eine obere als auch eine untere Schranke für die minimale Länge ist. Für den Beweis der unteren Schranke gib eine Menge von Schnitten an, unter der Verwendung eines BFS-Baumes.)

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Minimale Schnitte):
Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ zwei minimale s-t-Schnitte ($X, Y \subseteq V(G)$). *Minimal* bedeutet dabei, dass es keine andere Knotenmenge $U \subseteq V(G)$ mit $\sum_{e\in\delta^+(U)} u(e) < \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e), \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ gibt; $\delta^+(X)$ ist dabei wie in der Vorlesung definiert.

Zeige, dass dann auch $\delta^+(X \cup Y)$ und $\delta^+(X \cap Y)$ minimale s-t-Schnitte sind.

(Tipp: Zeige zunächst $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e)+\sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e) \geq \sum_{e\in\delta^+(X\cup Y)} u(e)+\sum_{e\in\delta^+(X\cap Y)} u(e)$, indem du begründest, dass jede Kante die auf der rechten Seite der Ungleichung auftaucht auch auf der linken auftauchen muss. Nutze, $\sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) = \sum_{e\in\delta^+(Y)} u(e)$ und die Minimalität der Schnitte.)

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Algorithmus von Ford und Fulkerson):

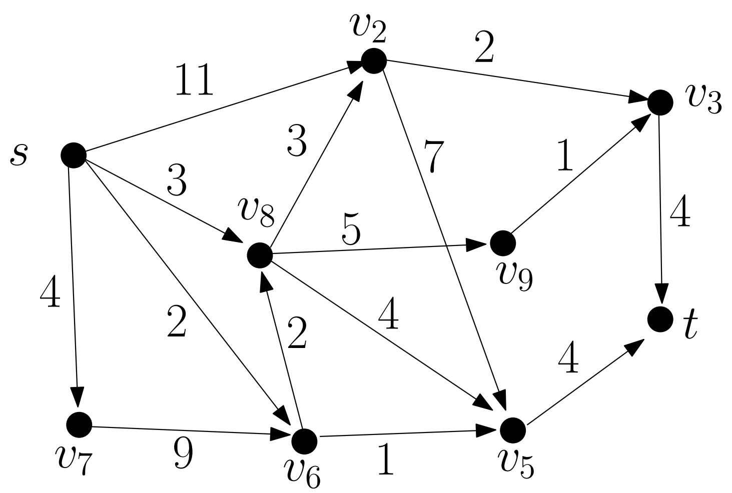

Abbildung 1: Das Netzwerk (G, u, s, t). Die Zahlen an den Kanten sind die Kapazitäten.

Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Ford und Fulkerson einen maximalen s-t-Fluß im Netzwerk (G, u, s, t). Gib außerdem einen minimalen Schnitt an.
(Hinweis: Der Algorithmus wird in der Vorlesung am 8.6. vorgestellt.)

(20 Punkte)