Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 09**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Approximationsalgorithmen
Übung 5 vom 09.06.2009

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 23.06.09, bis 14:30 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Das Vertex-Cover-Problem):
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ ein zusammenhängender Graph und T ein Baum, der durch Anwenden von Tiefensuche mit Wurzel v entstanden ist. Sei B die Menge aller Blätter von T. $C = V \setminus B$ ist ein Vertex Cover für G (vgl. Blatt 4 Aufg. 3). Zeige, dass C höchstens doppelt so groß wie ein minimales Vertex Cover ist. (Hinweis: Zeige, es gibt ein Matching M in T mit $|C|/2$ Kanten.)

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Das Bin-Packing-Problem):
Geben seien n Objekte mit Größen $a_1, \ldots, a_n \in [0, 1]$ und unendlich viele Behälter der Größe 1. Gesucht ist eine Packung der n Objekte in möglichst wenige Behälter.

(a) Der First-Fit-Algorithmus arbeitet wie folgt: Seien $B_1, \ldots, B_k$ die Behälter die bereits Objekte enthalten und a_i das nächste Element. Der Algorithmus wählt den Behälter mit dem kleinsten Index, der a_i aufnehmen kann. Falls es einen solchen Behälter nicht gibt, wird ein neuer Behälter B_{k+1} geöffnet. Zeige, der First-Fit-Algorithmus hat Approximationsgüte 2.

(b) Zeige, dass es für das Bin-Packing-Problem keinen Approximationsalgorithmus mit Güte $\frac{3}{2} - \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ geben kann. (Hinweis: Das Problem für n Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in [0, 1]$ zu entscheiden, ob diese sich in zwei Mengen A_1 und A_2 einteilen lassen, so dass $\sum_{a_i \in A_1} a_i = \sum_{a_i \in A_2} a_i$ gilt, ist NP-vollständig.)

(c) Der Next-Fit-Algorithmus arbeitet wie folgt: Zu jedem Zeitpunkt gibt es genau einen geöffneten Behälter B_j. Das nächste Objekt wird in B_j gepackt falls es paßt, ansonsten wir ein neuer leerer Behälter B_{j+1} geöffnet; B_j wird geschlossen und nie wieder geöffnet. Zeige, der Next-Fit-Algorithmus hat Approximationsgüte 2.

(d) Zeige, dass die Schranke aus (c) nicht verbessert werden kann.

(10+10+10+10 Punkte)