Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 09**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Approximationsalgorithmen
Übung 4 vom 19.05.2009

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 09.06.09, bis 14:30 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Cliquen):
Eine *Clique* in einem Graphen ist eine Teilmenge $C \subseteq V$, so dass zwischen je zwei Knoten aus C eine Kante existiert. Im Maximum-Clique-Problem wird eine kardinalitätsmaximale Clique gesucht.

(a) Zeige, dass das Minimum-Vertex-Cover-Problem auf das Maximum-Clique-Problem (und umgekehrt) reduziert werden kann.
(Tipp: `http://mathworld.wolfram.com/GraphComplement.html`)

(b) Zeige oder widerlege: Ein Approximationsalgorithmus mit Approximationsfaktor 2 impliziert einen Approximationsalgorithmus der selben Güte für das Maximum-Clique-Problem. (10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Das Rucksackproblem):
Das Rucksackproblem ist wie folgt definiert: Gegeben ein Rucksack der Größe W und n Objekte $1, \ldots, n$ mit Gewichten $0 \leq w_i \leq W$ und Profiten $p_i \geq 0$. Gesucht wird eine Auswahl von Objekten, die den Profit maximieren und in den Rucksack passen, d.h., die Summe der ausgewählten Gewichte darf nicht größer als W sein.

(a) Betrachte folgenden Algorithmus: Ändere die Nummerierung der Objekte, so dass $\frac{p_1}{w_1} \leq \frac{p_2}{w_2} \leq \ldots \leq \frac{p_n}{w_n}$ gilt. Wähle die Objekte in dieser Reihenfolge, bis der Rucksack voll ist. Zeige, dass dieser Algorithmus keinen konstanten Approximationsfaktor hat.

(b) Betrachte nun die folgende Modifikation des Algorithmus mit der Nummerierung aus (a): Finde das kleinste k, so dass die Objekte $1, 2, \ldots, k$ nicht mehr in den Rucksack passen. Wähle nun diejenige der beiden Mengen $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ und $\{k\}$, die mehr Profit verspricht. Beweise eine möglichst gute Gütegarantie. (15+15 Punkte)

Aufgabe 3 (Das Vertex-Cover-Problem):
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ ein zusammenhängender Graph und T ein Baum, der durch Anwenden von Tiefensuche mit Wurzel v entstanden ist. Sei B die Menge aller Blätter von T. Zeige, dass $V \setminus B$ ein Vertex Cover für G ist. (Hinweis: Ein Blatt ist ein Knoten, der nicht die Wurzel ist und Grad 1 hat.) (10 Punkte)