Abteilung Algorithmik
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund **SoSe 09**
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Nils Schweer

Approximationsalgorithmen
Übung 2 vom 22.04.2009

Abgabe der Lösungen am Dienstag, den 05.05.09, bis 13:00 Uhr in der Abteilung *Algorithmik* (IZ 262).
Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1 (Graphenfärbung):
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Färbung von G mit k Farben ist eine Funktion $\xi : V \mapsto \{1, \ldots, k\}$ mit der Eigenschaft

$$\forall v, w \in V : (v, w) \in E \rightarrow \xi(v) \neq \xi(w) \ .$$

(D.h. zwei adjazente Knoten haben eine unterschiedliche Farbe.) Das Entscheidungsproblem k-Color hat als Input einen Graphen G und eine Zahl k. Gefragt ist, ob der Graph eine Färbung mit k Farben hat. Gib einen Algorithmus an, der 2-Color in polynomieller Zeit löst.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Vertex Cover auf Bäumen):

(a) Gib einen Polynomialzeit-Algorithmus für das Vertex-Cover-Problem an, wenn als Input nur Bäume verwendet werden. (Tipp: Was kann man über die Blätter der Bäume im Bezug auf ihre Zugehörigkeit zu einem optimalen Vertex Cover aussagen?)

(b) Sei T_n der vollständige Binärbaum der Tiefe n (d.h. auf jedem Pfad von der Wurzel r zu einem beliebigen Blatt liegen n Knoten). Zeige: Für ungerades n ist die Wurzel nie in einem optimalen Vertex Cover enthalten.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Das Independent-Set-Problem):
Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt *unabhänging*, falls für alle $u, v \in U$ gilt: $\{u, v\} \notin E$. Beim Independent-Set-Problem wird eine möglichst große unabhängige Menge gesucht. Zeige: C ist genau dann ein Vertex Cover von $G = (V, E)$, wenn $U = V \setminus C$ eine unabhängige Menge ist. Zeige außerdem: C ist genau dann eine optimale Lösung für das Vertex-Cover-Problem, wenn $U = V \setminus C$ eine optimale Lösung für das Independent-Set-Problem ist.

(20 Punkte)